

# Lista 14

**Zadanie 1.** Dla podanych poniżej permutacji  $\sigma$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 3 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 5 & 7 & 14 & 6 & 2 & 1 & 10 & 4 & 9 & 13 & 3 & 11 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 3 & 10 & 1 & 13 & 14 & 9 & 6 & 4 & 12 & 5 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix}.$$

podaj permutację odwrotną  $\sigma^{-1}$ ; rozłóż  $\sigma$  oraz  $\sigma^{-1}$  na cykle. Podaj rząd  $\sigma$  oraz  $\sigma^{-1}$ .

**Zadanie 2.** Czy zbiór  $\{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\}$  z działaniem składania permutacji jest podgrupą grupy  $S_4$ ? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzelementowe to czy otrzymamy podgrupę  $S_4$ ?

*Wskazówka:* Ile elementów ma grupa? Czy jeśli dodamy do tego zbioru wszystkie cykle trzelementowe to czy otrzymamy podgrupę  $S_4$ , która ma

**Zadanie 3** (\* nie liczy się do podstawy). Dla macierzy  $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$  rozpatrzmy funkcje:

$$f((a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i},$$

$$f'((a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}.$$

Pokaż, że obie definiują wyznacznik.

*Wskazówka:* Możesz np. sprawdzić, że spełnia aksjomaty wyznacznika. Tylko zamiana kolumn jest nietrywialna: rozpatrz, jak zmienia się znak konkretnego iloczynu po zamianie kolumn.

**Zadanie 4.** Niech grupa  $G$  działa na zbiorze  $\mathcal{C}$  i  $c \in \mathcal{C}$ . Pokaż, że stabilizator  $G_c$  tego elementu jest podgrupą  $G$ .

**Zadanie 5** (Grupa dihedralna). Rozpatrzmy grupę obrotów i odbić  $n$ -kąta foremnego (nazywamy ją *grupą dihedralną*  $D_n$ ). Ile ma ona elementów? Pokaż, że nie ma innych przekształceń zachowujących ten wielokąt (tj. przekształceń z wierzchołków w wierzchołki, które zachowują sąsiedztwo wierzchołków).

$$|G| = |G| \cdot |O| \quad \text{Wskazówka}$$

**Zadanie 6.** Wyznacz rzędy grup obrotów brył platońskich: czworościanu foremnego, sześcianu foremnego, ośmiościanu foremnego, dwunastościanu foremnego, dwudziestościanu foremnego. Wyznacza też rzędy grup obrotów i symetrii.

$$|G| = |G| \cdot |O| \quad \text{Wskazówka}$$

**Zadanie 7.** Niech grupa  $G$  działa na zbiorze  $X$  i  $|G| = 3^k$ , a  $|X|$  nie jest podzielne przez 3. Pokaż, że w  $X$  istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z  $G$ , (tzn. jego stabilizator to  $G$ ).

**Zadanie 8.** Rozpatrzmy grę w kółko i krzyżyk na planszy  $5 \times 5$ ; w szczególności każde pole może być wypełnione kółkiem, krzyżykiem lub być puste. Dwie plansze są identyczne, jeśli jedną można przeprowadzić na drugą przez obrót lub symetrię, po której dodatkowo możemy wymienić kółka na krzyżyki i odwrotnie.

Znajdź ilość rozróżnialnych plansz.

**Zadanie 9.** W grupie  $S_{10}$  rozpatrzmy grupy generowane przez

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & 9 & 4 & 10 & 6 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 8 & 3 & 2 & 9 & 5 & 10 \end{pmatrix}$
3.  $(1, 6, 9)(2, 10)(3, 4, 5, 7, 8)$ .

Dla każdego elementu ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$  wyznacz jego orbitę oraz stabilizator dla naturalnego działania działania tych podgrup na zbiorze  $\{1, 2, \dots, 10\}$ .

**Zadanie 10.** Niech grupa  $G$  działa na zbiorze  $X$ . Rozpatrzmy dwa elementy  $X$ :  $x, y$  z tej samej orbity. Udowodnij, że zbiór elementów przekształcających  $x$  na  $y$ , tj.:

$$\{g : g(x) = y\}$$

jest

- warstwą lewostronną  $G_x$  w  $G$ ;
- warstwą prawostronną  $G_y$  w  $G$ .

**Zadanie 11.** Ile jest rozróżnialnych naszyjników mających 6 równo oddalonych koralików tej samej wielkości, przy czym koraliki mogą być z jednej strony białe, a z drugiej czarne. Przy obrocie kolory się nie zmieniają, zaś przy „przełożeniu na drugą stronę” (symetrii) każdy kolor zmienia się na przeciwny.