

Algebra 2025/26 — Egzamin poprawkowy część I

Czas: 180 minut.

Zadania D1–D2 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce, podobnie zadania D3–D4 (na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce), zadania D5–D6 oraz zadania D7–D8. Punktacja: po 4 punkty za jedno zadanie.

Każde z zadań T1 – T5 należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce; rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Zadanie D1. Co to znaczy, że $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$? Jakie znasz alternatywne charakteryzacje podprzestrzeni? Na które z wymienionych operacji są zamknięte podprzestrzenie: $\cap, \cup, +$? Jak jest zdefiniowane $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$, co umiesz powiedzieć o wymiarze $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$?

Zadanie D2. Co to znaczy, że wektor $\vec{V}$ jest wektorem własnym macierzy M dla wartości własnej λ ? Co umiesz powiedzieć o zbiorze wektorów własnych dla ustalonej wartości własnej? Jak wyznaczyć zbiór wartości własnych M ? Co to jest krotność algebraiczna i geometryczna wartości własnej? Jaka jest między nimi zależność?

Zadanie D3. Co to znaczy, że układ wektorów jest ortogonalny, a co, że ortonormalny? Co to znaczy, że układ wektorów jest bazą ortonormalną, czy taka baza zawsze istnieje? Jak jest zdefiniowany rzut prostopadły na podprzestrzeń $\mathbb{W}$? Jeśli $\mathbb{W}$ ma bazę ortonormalną $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$, to jak wyraża się rzut prostopadły wektora $\vec{v}$ na podprzestrzeń $\mathbb{W}$? Jak przekształcić bazę do bazy ortonormalnej?

Zadanie D4. Jak jest zdefiniowany wyznacznik $\det M$? Jakie znasz metody obliczania wyznacznika? Jak przy użyciu wyznacznika $\det M$ określić, czy M jest odwracalna?

Jeśli $0 \neq a = \det A, b = \det B$, to ile wynoszą wyznaczniki $\det(AB), \det(A^{-1}), \det(-A), \det(A^T)$?

Zadanie D5. Co to znaczy, że przekształcenie $L : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ jest liniowe? Co to jest jądro i obraz przekształcenia liniowego? Co umiesz powiedzieć o ich wymiarach? Co to jest rząd przekształcenia, co umiesz powiedzieć o rzędzie $L \circ L'$?

Które z poniższych przekształceń są liniowe (nie musisz uzasadniać odpowiedzi)? $\mathbb{R}[X]$ to przestrzeń wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{R}$.

- $A : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} : A(f) = f(1)$;
- $B : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R} : B(f) = f(0)^2$;
- $C : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : C(f) = f'$;
- $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] : D(f) = f' \cdot f''$;
- $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : E(x, y, z) = xyz$;
- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : F(x, y) = (x, 1, y)$;
- $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : G(x, y) = x + 2y - z$;
- $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : H(x, y, z) = (x, x + y, x - y)$;

Zadanie D6. Dla grupy permutacji S_n , jak jest zdefiniowany cykl? Co to jest rozkład na cykle rozłączne, jakie ma własności? Jakie własności permutacji można policzyć używając jej rozkładu na cykle rozłączne?

Co to jest transpozycja? Które permutacje można wyrazić jako złożenie transpozycji? Co to jest transpozycja elementów sąsiednich? Które permutacje można wyrazić jako złożenie transpozycji elementów sąsiednich?

Zadanie D7. Jak jest zdefiniowany największy wspólny dzielnik (gcd) dwóch liczb naturalnych? Czy zawsze istnieje? Jak go obliczyć? Jakie ma inne własności? Dla a względnie pierwszego z n , jak wykorzystać własności gcd do obliczenia elementu a^{-1} w $\mathbb{Z}_n$?

Zadanie D8. Ile elementów może mieć ciało skończone? Jak można skonstruować ciało skończone o zadanej liczbie elementów? Ile jest (nieizomorficznych) ciał o danej (skończonej) liczbie elementów?

Co umiesz powiedzieć o zbiorze elementów odwracalnych $\mathbb{F}^*$ dla ciała skończonego $\mathbb{F}$?

Zadanie T1. Dla podanych poniżej wektorów $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4 \in \mathbb{R}^3$ określ, czy istnieje podprzestrzeń $\mathbb{W} \leq \mathbb{R}^3$ wymiaru 2 oraz wektor $\vec{S} \in \mathbb{R}^3$, takie że $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \vec{V}_4 \in \vec{S} + \mathbb{W}$. Jeśli tak, to podaj $\vec{S}$ oraz bazę $\mathbb{W}$; jeśli nie, to odpowiedź uzasadnij.

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Wskazówka: co umiesz powiedzieć o $\vec{V}_i - \vec{V}_1$?

Zadanie T2. Ile rozwiązań ma poniższy układ równań nad $\mathbb{Z}_{13}$ w zależności od wartości parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_{13}$?

$$\begin{cases} x & -\lambda y & +3z & = & 0 \\ 2x & +\lambda y & +2z & = & \lambda \\ 3x & +3y & +\lambda z & = & 2 \end{cases}.$$

Zadanie T3. Uzasadnij, czy poniższa macierz liczb rzeczywistych jest dodatnio określona.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie T4. Rozważ grupę permutacji $S = \langle \sigma \rangle$ generowaną przez

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 7 & 12 & 1 & 9 & 4 & 15 & 3 & 16 & 11 & 6 & 14 & 2 & 10 & 5 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

Rozważmy naturalne działanie S na zbiorze liczb $\{1, 2, \dots, 16\}$. Dla elementu 7 znajdź orbitę i stabilizator tego elementu, podaj ich moce. Nie musisz podawać wprost wszystkich elementów odpowiedniej grupy, możesz ją zadać poprzez podanie generatorów.

Zadanie T5. Rozważmy standardowy iloczyn skalarny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Pokaż, że układ B

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right)^T, \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)^T, (0, 0, 1)^T$$

jest bazą ortonormalną. Oblicz macierze przejścia M_{EB} i M_{BE} , gdzie E jest bazą standardową.

Rozważ przekształcenie F , takie że macierz F wyrażona w bazie standardowej E to

$$M_{EE}(F) = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Czy F jest izometrią? Podaj macierz (w bazie standardowej E) przekształcenia odwrotnego do F .

Podaj jawne wzory (np. używające mnożenia konkretnych macierzy lub konkretnych iloczynów skalarnych) na macierze przekształcenia F oraz F^{-1} w bazie B , tj. $M_{BB}(F), M_{BB}(F^{-1})$; nie musisz wykonać tych obliczeń, by uzyskać konkretną macierz.