

Algebra 2025/26 — Egzamin część I

Czas: 180 minut.

Zadania D1–D2 należy oddać na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce, podobnie Zadania D3–D4 (na jednej, podpisanej nrem indeksu kartce) Zadania D5–D6 oraz Zadania D7–D8. Punktacja: po 4 punkty za jedno zadanie. Każde Zadanie T1 – T5 należy oddać na osobnej, podpisanej nrem indeksu kartce. Rozwiązanie powinno zawierać **zwięzły** opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń. Punktacja: po 10 punktów.

Osoby zaliczające **różnice programowe**: zadania D6–D8 oraz T4–T5. Czas: 80 minut.

Zadanie D1. Co to znaczy, że układ wektorów $U \subseteq V$ jest zbiorem niezależnym, co że zbiorem generującym a co, że bazą? Co to jest wymiar przestrzeni V ? Jakie znasz zależności łączące wymiary różnych podprzestrzeni? Co umiesz powiedzieć o rozszerzaniu lub ograniczaniu układu wektorów do bazy?

Zadanie D2. Jak jest zdefiniowana macierz odwrotna, co to jest macierz odwracalna? Jakie znasz charakterystyki macierzy odwracalnej? Czy znasz wzór lub algorytm na obliczanie macierzy odwrotnej? Czy znasz klasy macierzy, dla których macierz odwrotna jest szczególnie prosta? Jakie znasz klasy macierzy zamknięte na operację odwracania macierzy?

Zadanie D3. Dany jest układ równań liniowych postaci $A\vec{X} = \vec{B}$. Jakie znasz warunki gwarantujące, że ma on rozwiązanie? Jakiej postaci jest zbiór rozwiązań? Co więcej umiesz powiedzieć, jeśli A jest kwadratowa i odwracalna?

Zadanie D4. Jak jest zdefiniowany standardowy iloczyn skalarny? Jakie są jego własności? Jak przy jego użyciu zdefiniować prostopadłość i dopełnienie ortogonalne? Czy znasz inną charakterystykę dopełnienia ortogonalnego? Co umiesz powiedzieć o wymiarze podprzestrzeni W i jej dopełnienia ortogonalnego $W^\perp$? Co umiesz powiedzieć o $(W^\perp)^\perp$?

Zadanie D5. Jakie znasz charakterystyki macierzy dodatnio określonych (teoretyczne i algorytmiczne)? Jeśli A, B są dodatnio określone, które z poniższych macierzy również są dodatnio określone: $-A, A+B, A-B, 3A, A^{-1}, A^2, AB, (A-\text{Id})^2, A^2 - 2A + 2\text{Id}$ (nie musisz uzasadniać odpowiedzi).

Zadanie D6. Jak jest zdefiniowany rząd elementu w grupie? Co to znaczy, że grupa jest cykliczna? Co umiesz powiedzieć o grupach cyklicznych oraz o ich podgrupach? Dla ciała skończonego $\mathbb{F}$, jakie znasz własności $\mathbb{F}^{**}$?

Zadanie D7. Jak jest zdefiniowany symbol Eulera $\varphi(n)$? Jakie spełnia własności, jak go wydajnie policzyć?

Zadanie D8. Jak jest zdefiniowana podzielność wielomianów? Jak jest zdefiniowany największy wspólny dzielnik (gcd) wielomianów, czy zawsze istnieje? Jak go obliczyć? Jakie znasz własności gcd wielomianów?

Zadanie T1. Dla poniższej macierzy liczb rzeczywistych podaj jej wartości własne, ich krotności algebraiczne i geometryczne. Dla największej (jako liczby rzeczywistej) wartości własnej podaj wektor własny.

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie T2. Podaj bazy jądra i obrazu macierzy liczb rzeczywistych

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie T3. Przeprowadź ortogonalizację Grama-Schmidta na wektorach

$$(2, 1, 1, 0)^T, (3, 4, 2, 1)^T, (3, -3, 3, -3)^T$$

i uzupełnij je do bazy ortogonalnej. Wyraż w tej bazie wektor $(6, 12, 18, 24)^T$.

Zadanie T4. Dla permutacji

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 11 & 12 & 9 & 10 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\tau = (1, 4, 7, 11, 12, 3, 8, 10)(6, 5, 2, 9)$$

oblicz permutację

$$\rho = \tau^{84} \sigma^{-63}.$$

Przedstaw ρ jako złożenie cykli rozłącznych. Podaj permutację odwrotną ρ^{-1} . Podaj rząd ρ, ρ^{-1} . Czy ρ, ρ^{-1} są permutacjami parzystymi?

Zadanie T5. Gra w Gomoku¹ jest podobna do gry w kółko i krzyżyk, ale gra się na planszy 15×15 i na każdym polu może być kamień czarny, kamień biały lub pole może być puste. Dwie plansze są nierozróżnialne, jeśli jedną można przeprowadzić na drugą przez obrót lub symetrię, po której dodatkowo możemy wymienić białe kamienie na czarne i odwrotnie.

Ile jest rozróżnialnych plansz; nie musisz podawać liczby, wystarczy jawne wyrażenie arytmetyczne.

¹Dość popularna w Polsce w latach 80., gra się do uzyskania sekwencji długości 5.