Lista 3

Zadanie 1. Wyznacz bazę obrazu dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $F(x,y,z) = (2x+y, 3x-z, 5x+y-z, -2x+2y-2z)$;
- $G(x,y,z) = (x+y, y-2z, 3z, x-y)$;
- $H(x,y,z) = (x+y, y+z)$;

Wskazówka: Możesz skorzystać z faktu: jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\mathrm{LIN}(b_1,\ldots,b_k) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{LIN}(F(v_1),\ldots,F(v_k)) = \mathrm{Im}\, F$.

Zadanie 2. Wyznacz bazę jądra dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $H(x,y,z) = (x+y, y+z)$;
- $I(x,y,z) = (x+y, 2y+z, y-z)$;
- $J(x,y,z) = (x+y, 2x+2y, 3x+3y)$.

Wskazówka: Ułóż odpowiedni układ równań.

Zadanie 3. Które z poniższych przekształceń są liniowe (dziedzinami i przeciwdziedzinami przekształceń są przestrzenie $\mathbb{R}^n$ dla odpowiednich n)?

- $L(x,y) = (2x-y, x+3y-1, 5x+2y)$,
- $L'(x,y,z) = (3x+5y-2z, 2x-y)$,
- $L''(x,y,z) = (x\cdot y+z, -2x-z, -2y-z)$.

Dla tych z powyższych przekształceń, które są liniowe, znajdź ich rzędy oraz podaj bazy jądra i obrazu.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ niezerowym (tj. istnieje $v \in \mathbb{V}$ takie że $F(v) \neq \vec{0}$) przekształceniem liniowym (takie przekształcenia nazywamy *funkcjonałami liniowymi*).

- Jaki jest wymiar jądra $\ker F$?
- Ustalmy dowolny wektor $w \in \mathbb{V} \setminus \ker F$. Pokaż, że $\mathrm{LIN}(\ker F \cup \{w\}) = \mathbb{V}$.
- Niech F, G będą dowolnymi funkcjonałami liniowymi na $\mathbb{V}$ o tym samym jądrze, tj. $\ker F = \ker G$. Korzystając z poprzedniego punktu pokaż, że wtedy istnieje $\beta \in \mathbb{F}$, taka że $F = \beta G$.

Zadanie 5. Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.:

$$F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2} \quad ,$$

gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Podaj bazy jądra $\ker F$ i obrazu $\mathrm{Im}\, F$ tego przekształcenia. Podaj ich wymiary.

Wskazówka: Możesz skorzystać ze wskazówek do Zadania 1 i Zadania 2.

Zadanie 6. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\mathbb{V})$.

Zadanie 7 (* Nie liczy się do podstawy, choć nie jest takie trudne). Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(v) = \vec{0}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij uogólnienie tego faktu:
Jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(v) = \vec{0}$ dla dowolnego v, to zachodzi również $L^n(v) = \vec{0}$.

Wskazówka: Rozważ wektory $v, L(v), L^2(v), \ldots, L^n(v)$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 8. Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α zachodzą następujące zależności (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\mathrm{Id} \cdot A = A \quad B \cdot \mathrm{Id} = B$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$$
$$A[B|C] = [AB|AC]$$
$$\begin{bmatrix} B \\ \hline C \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} BA \\ \hline CA \end{bmatrix}$$

Zadanie 9. Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \quad .$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależności:

$$f_{n+k} = f_{k-1} f_n + f_k f_{n+1} = f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n.$$

Zadanie 10. Podaj zwartą postać macierzy (nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n \quad .$$

Postać zwarta nie zawiera sum, wielokropków itp.

Zadanie 11. Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^3 ; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$