WYKŁAD 6

Twierdzenie 6.8 (Cauchy).

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \ .$$

A, B - kwadratowe

1) $\det A = 0$ lub $\det B = 0$

$\det(AB) = 0$

2) $\det A \neq 0$ $\det B \neq 0$

A - odwracalna

$A = \prod_{i=1}^{k} E_i$ $\qquad B = \prod_{i=k+1}^{k+k'} E_i$

E_i - macierze el.

T_{ij}

$$\begin{matrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{matrix}$$

$Id + \alpha 1_{ij}$

$$\begin{array}{c|cccccc} & & & & j & & \\ \hline & 1 & & & & & \\ i & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \end{array}$$

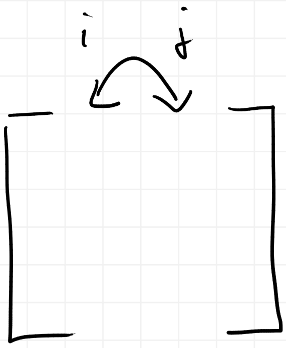
$D_{i\alpha}$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ i & & & & \alpha & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

$|T_{ij}| = -1$ $\qquad |D_{i\alpha}| = \alpha$ $\qquad |Id + \alpha 1_{ij}| = 1$

$|A \cdot T_{ij}|$

$A T_{ij}$



A z zam. i-tą kol
j-tą

wyzn. zm. znak

$|A T_{ij}| = -|A|$

$|A| \cdot \underbrace{|T_{ij}|}_{-1} = -|A|$

$A D_{i\alpha}$: A w której przem i-tą kol. $\cdot \alpha$

$$\begin{array}{c} \cdot\alpha \\ \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \\ i \end{array}$$

$$|A D_{i\alpha}| = \underbrace{\alpha \cdot}_{|D_{i\alpha}|} |A| = |A| \cdot |D_{i\alpha}|$$

$Id + \alpha 1_{ij}$ dodanie do i-tej kol $\alpha \cdot j$-tej

$$|A (Id + \alpha 1_{ij})| = |A| = |A| \cdot |\underbrace{Id + \alpha 1_{ij}}_{1}|$$

$$|A \cdot E_i| = |A| \cdot |E_i|$$

m. el.

Indukcja $E_1 \dots E_k$ ← el.

$$\left|\prod_{i=1}^{k} E_i\right| = \prod_{i=1}^{k} |E_i| \quad \leftarrow \text{prosta ind.} \quad (*)$$

A, B ← odw. odwr.

$$A = \prod_{i=1}^{k} E_i \qquad B = \prod_{i=k+1}^{k+k'} E_i$$

E_i ← el.

$$|AB| = \left|\prod_{i=1}^{k} E_i \cdot \prod_{i=k+1}^{k+k'} E_i\right| = \left|\prod_{i=1}^{k+k'} E_i\right| \overset{z(*)}{=}$$

$$= \prod_{i=1}^{k+k'} |E_i| = \underbrace{\prod_{i=1}^{k} |E_i|}\cdot \underbrace{\prod_{i=k+1}^{k+k'} |E_i|}_{(*)} =$$

$$= \underbrace{\left|\prod_{i=1}^{k} E_i\right|}_{A} \cdot \underbrace{\left|\prod_{i=k+1}^{\overset{*}{k+k'}} E_i\right|}_{B} = |A| \cdot |B|$$

Fakt 6.9. *Wyznacznik macierzy oraz macierzy transponowanej jest taki sam, tj.:*

$$\det(A) = \det(A^T) \ .$$

1) $\det A = 0$ $\quad \cancel{\det}$ $\ rk(A) < n$

$rk(A^T) < n \implies \det(A^T) = 0$

2) $A = \prod_{i=1}^{k} E_i$

$|A^T| = \prod_{i=1}^{k} |E_{k-i+1}|$

$= \underbrace{\left|\prod_{i=1}^{k} E_i\right|}_{A}$

$= |A|$

$T_{ij}^T = T_{ij}$

$D_{i\alpha}^T = D_{i\alpha}$

$(Id + \alpha 1_{ij})^T = Id + \alpha 1_{ji}$

α α

Fakt 6.10. • *Dodanie do wiersza macierzy wielokrotności innego wiersza nie zmienia wyznacznika.*

- *Wyznacznik macierzy z zerowym wierszem jest równy 0.*
- *Wyznacznik jest funkcją wieloliniową wierszy.*
- *Zamiana dwóch wierszy miejscami zmienia znak wyznacznika na przeciwny.*

$A \quad A^T$

T

$|A \cdot E_i|$

$= |A| \cdot |E_i|$

$= |E_i| \cdot |A| = |E_i A|$

Przykład 6.11 (Wyznacznik macierzy Vandermonde'a). Niech $q_1, q_2, \dots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a V_n ma wyrazy równe $v_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$q_1, \dots, q_n$

Pokażemy, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (q_j - q_i) \; . \neq 0$$

jeśli q_i par. różne

W szczególności implikuje to, jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \dots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \dots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

$-q_1 \cdot$ $\qquad$ $-q_1 \cdot$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & & & \\ 0 & q_2 - q_1 & (q_2^2 - \underbrace{q_1^2}) - q_1(q_2 - \underbrace{q_1}) & \dots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} - q_1(q_2^{n-2} - q_1^{n-2}) \\ 0 & & & & \\ 0 & q_n - q_1 & (q_n^2 - \underbrace{q_1^2}) - q_1(q_n - \underbrace{q_1}) & \dots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} - q_1(q_n^{n-2} - q_1^{n-2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1 q_2 & q_2^{n-1} - q_1 q_2^{n-2} \\ & & (q_2 - q_1)\, q_2^1 & (q_2 - q_1)\, q_2^{n-2} \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1 q_n & (q_n - q_1)\, q_n^{n-2} \\ & & (q_n - q_1)\, q_n & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|ccccc}
 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\
q_2-q_1 \longrightarrow & 0 & 1(q_2-q_1) & q_2(q_2-q_1) & \dots & q_2^{n-2}(q_2-q_1) \\
q_3-q_1 \longrightarrow & 0 & 1(q_3-q_1) & q_3(q_3-q_1) & & q_3^{n-2}(q_3-q_1) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
q_n-q_1 \longrightarrow & 0 & 1(q_n-q_1) & q_n(q_n-q_1) & & q_n^{n-2}(q_n-q_1)
\end{array}
$$

$$
\prod_{i=2}^{n}(q_j-q_1)\cdot
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & q_2 & q_2^{n-2} \\
0 & 1 & q_3 & q_3^{n-2} \\
 & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & q_n & q_n^{n-2}
\end{vmatrix}
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{q_2,\dots,q_n}
$$

$$
= \dots = \prod_{1\le i<j\le n}(q_j-q_i)
$$

6.3 Wyznacznik a macierz odwrotna

Fakt 6.12. *Jeśli M jest odwracalna, to*

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

$$|M M^{-1}| = |M| \cdot |M^{-1}|$$

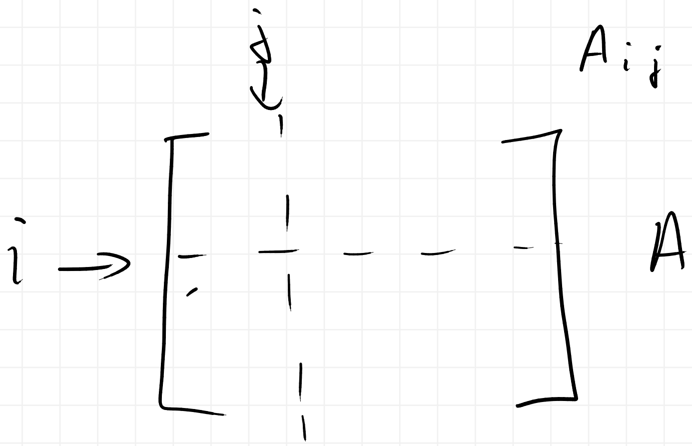
$$\begin{array}{ccc} \| & & /\!/ \\ |Id| & = & 1 \end{array}$$

$$|M^{-1}| = \frac{1}{|M|}$$

Lemat 6.13. *Macierz odwrotna do macierzy $\cancel{M}$ A jest równa*

$$\frac{1}{\det(A)} C^T, \text{ gdzie } c_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{i,j}| \ .$$

$A_{ij} \leftarrow$ macierz A bez i-tej kol
j-tego wier.



$C \qquad c_{ij} = (-1)^{i+j} \; |A_{i,j}|$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T$$

Interpretacja $\quad C^T$

$$A' = \frac{1}{|A|} \cdot C^T \qquad a_{ij}'$$

$$(A \cdot A')_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot \underset{\frac{1}{|A|} \cdot c_{ji}}{\underset{\shortparallel}{a_{kj}'}} = \frac{1}{|A|} \underbrace{\sum a_{ik} \cdot (-1)^{k+j} |A_{jk}|}$$

$$\frac{1}{|A|} \cdot \sum_k a_{ik} \cdot (-1)^{k+j} |A_{jk}| = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

rozwinięcie Laplace'a ? dla wiersza

A_1
A_2
$\vdots$
A_i

j

A

j-ty $\to$ $a_{i1}\ a_{i2} \ldots\ a_{in}$
A_i

$A_1, \ldots, A_n \to$ wiersze A

A_1
A_2
A_3
A_m

$A_j \to A_i \cancel{A_j}\ a_{i1} a_{i2} \ldots$

$$\sum_k a_{jk} \cdot (-1)^{j+k} |A_{j,k}|$$

$\|$

Rozw. Lapl. A

$\cancel{a_{jk}}$ $a_{i,k}$

A_1
A_2
$\vdots$
j-ty A_i
$\vdots$
A_j

$i = j$ A
$|A|$

$i \neq j$ 0 A_j A_j

$$(A\,A')_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$AA' = \mathrm{Id}$$

Przykład 6.14. Dzięki Lematowi 6.13 można np. łatwo policzyć macierz odwrotną do macierzy 2×2:

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \longleftarrow$$

6.4 Wyznacznik przekształcenia

Potrafimy zdefiniować wyznacznik dla macierzy, ale co z przekształceniem liniowym? Każde przekształcenie zadaje macierz, ale ta macierz zależy od bazy. Okazuje się, że wartość wyznacznika nie.

Lemat 6.15. *Niech $F : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, zaś M, M' będą macierzami dla tego przekształcenia wyrażonymi w rożnych bazach. Wtedy*

$$|M| = |M'|.$$

B , B' ← bazy

$$|M_{BB}(F)| = |M_{\underbrace{B'B'}}(F)|$$

$$\underline{|M_{B'B'}(F)|} = \cancel{|M_{BB'}|} \cdot |M_{BB}(F)| \cdot \cancel{|M_{B'B}|}$$

$$= \underline{|M_{BB}(F)|} \qquad M_{BB'} M_{B'B} = Id$$

Definicja 6.16. Dla przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jego wyznacznik $\det(F)$ to $\det(M)$ gdzie M jest macierzą tego przekształcenia wyrażoną w dowolnej bazie $\mathbb{V}$.

$$M = M_{BB}(F)$$

Uwaga $|M| \approx$ objętość $\qquad |F|$ ile razy F zw. objętość

Rozdział 7

Układy równań liniowych i ich rozwiązywanie

zm $x_1, \dots, x_n$

Rozważmy układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

a_{ij}: wsp. przy x_j w i-tym rów.

$?\ (m = n)$

Będziemy zapisywać równania w postaci

$$\boxed{A\vec{X} = \vec{B}}, \tag{7.1}$$

gdzie

macierz wsp. wektor zm. wektor pr.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

7.1 Bazowy przypadek: n zmiennych, n równań, macierz odwracalna

Intuicja: w najprostszym przypadku, gdy A jest macierzą kwadratową, możemy odwrócić A i nałożyć obustronnie na równanie, uzyskując

A
$\uparrow$
kw., odwracalna

$$\cancel{A^{-1}}\cancel{A}\vec{X} = A^{-1}\vec{B}$$

$$\vec{X} = \underline{A^{-1}\vec{B}} \leftarrow \text{jeśli jest rozw.}$$

$$\underline{\vec{X} = A^{-1}\vec{B}}$$

$$A(\underbrace{A^{-1}B}_{X}) = \cancel{AA^{-1}}B = B$$

I tym samym mamy rozwiązanie. Można łatwo sprawdzić, że jest to jedyne rozwiązanie.

Pokażemy teraz, jak wygląda to rozwiązanie.

Twierdzenie 7.1 (Wzory Cramera). *Jeśli w równaniu (7.1) macierz A jest kwadratowa i odwracalna, to jedyne rozwiązanie jest postaci $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, gdzie macierz A_{x_i} powstaje poprzez zastąpienie i-tej kolumny A przez $\vec{B}$.* $\Leftarrow \neq 0$

W szczególności, jeśli $\det(A) \neq 0$ to równanie ma jedno rozwiązanie.

$$\overset{i}{\left[A_1 \; A_2 \,\middle|\, \vec{B} \,\middle|\, \cdots A_n \right]} A$$

$$A = [A_1 | A_2 | \cdots | A_n]$$

$$A_{x_i} = [A_1 | \ldots \vec{B} \quad]$$

i-te miejsce

$$\underline{\det(A_{x_i})} = \det(A_1, A_2, \ldots, \underset{i\text{-te}}{\vec{B}}, \underset{i+1}{A_{i+1}}, \ldots A_n)$$

$$= \det(A_1, A_2, \ldots, AX, A_{i+1}, \ldots A_n)$$

$$\underline{x_i|A|} = x_i \underline{\det(A_1, A_2, \ldots, \underset{i\text{-te}}{A_i}, \ldots \overset{A_j}{\swarrow} \ldots)}$$

$i \neq j$ $\circlearrowleft$

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_i x_i \underset{A_i}{\underline{AE_i}} = \underline{\sum_j x_j A_j}$$

$$X = \sum x_i \vec{E_i}$$

$$|A_{x_i}| = x_i \cdot |A|$$

$$x_i = \frac{|A_{x_i}|}{|A|} \qquad \square$$

$n = 2, 3$ ma sens

A^{-1} przez wyzn. $\swarrow$ wz. minory

~~$A^{-1}AX$~~ $X = A^{-1}B$

7.2 Ogólne układy równań liniowych

Chcemy jednak zająć się tym problemem w większej ogólności:

- co jeśli A nie jest odwracalna? Czy wtedy rozwiązań jest wiele, czy może 0?
- co jeśli A nie jest kwadratowa (w szczególności: nieodwracalna)? Czym różnią się przypadki:
  - jest więcej równań, niż zmiennych?
  - jest więcej zmiennych, niż równań?

7.2.1 Układy jednorodne

Zajmijmy się trochę mniej ogólnym problemem: co jeśli $B = \vec{0}$? Taki układ nazywamy *jednorodnym*. Jedno rozwiązanie na pewno jest.

Lemat 7.2 (Układ jednorodny). *Zbiór wszystkich rozwiązań równania*

$$A\vec{X} = \vec{0}$$

L_A

jest przestrzenią liniową, jest to $\ker(A)$, *gdy* A *traktujemy jako przekształcenie liniowe z* $\mathbb{F}^n$ *w* $\mathbb{F}^m$. *Wymiar tej przestrzeni to* $n - \mathrm{rk}(A)$.

n - liczba zm.

$$L_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$$

$\vec{X}$ $\qquad L_A(\vec{X}) = \vec{0}$

$n = rk(L_A) + \dim(\ker L_A)$

$L_A(X) = A\vec{X}$

$\{\vec{X} : L_A(\vec{X}) = 0\} = \ker L_A$

$\dim(\ker L_A) = n - rk(A)$

||

wymiar pr. rozw.

||

zbiór rozw.

Np. A - odwr. $\quad rk(A) = n$

$\dim \ker(A)) = 0 \qquad \vec{0}$ - jed. rozw.

7.2.2 Układy niejednorodne

Fakt 7.3.

$$AX = B \text{ ma rozwiązanie} \iff B \in \mathrm{Im}(A) .$$

Jeśli równanie $AX = B$ *ma rozwiązanie to zbiór wszystkich jego rozwiązań jest warstwą względem* $\ker A$.

Uwaga. Jeśli ciało $\mathbb{F}$ jest nieskończone, to w tym przypadku jest nieskończenie wiele rozwiązań. W innym przypadku jest to $|\mathbb{F}|^k$, gdzie k jest wymiarem jądra.

$AX = B$ ma rozw. $\exists\, X_0$ $A\vec{X}_0 = \vec{B}$ ← jest w obr.

~~$AX = B$ ma rozw.~~ $B \in \mathrm{Im}(A)$ $\exists\, X_0$ rozw. $AX_0 = B$

X_0 - ustalone rozw $AX = \vec{B}$

X - rozw $\iff$ $AX = B$ $\iff$ $AX = AX_0$

$\iff$ $A(X - X_0) = \vec{0}$ $\iff$ $X - X_0 \in \ker A$

$\iff$ $X \in \underbrace{X_0 + \ker A}_{\text{ustalona warstwa } \ker A}$

Fakt 7.4 (Tw. Kronecker-Capelli). *Układ*

$$\underline{AX = B} \qquad (*)$$

ma rozwiązanie $\iff$ $\underline{\operatorname{rk}(A|B) = \operatorname{rk}(A)}$.

Macierz $[A|B]$ nazywana jest czasem *macierzą rozszerzoną* układu $AX = B$.

$$\operatorname{rk}(A|B) \geqslant \operatorname{rk}(A) \qquad A = [A_1 | \dots | A_n]$$

$(*)$ ma rozw $\iff$ $B \in \operatorname{Im}(A)$ $\iff$
$B \in \operatorname{LIN}(A_1, \dots, A_n) \iff \operatorname{rk}(A|B) = \operatorname{rk}(A)$

liczba lin. niez. kol. w $A|B$

$\mathbb{R}$

Przykład 7.5. Ile rozwiązań, w zależności od parametru λ, ma podany układ równań?

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & 1+\lambda \\ (6+\lambda^2)x_1 & -3x_2 & +(9-\lambda^2)x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Podany układ równań zapisany w postaci macierzowej wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6+\lambda^2) & -3 & (9-\lambda^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 6+\lambda^2 & -3 & (9-\lambda^2) \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ 6+\lambda^2 & -3 \end{matrix} = \underline{13(\lambda^2-1)}$$

1 rozw.

1° $\lambda \notin \{-1, 1\} \Rightarrow \det \neq 0$

2° $\lambda = 1 \vee \lambda = -1$

$$\begin{matrix} 3 & -1 & 4 & \\ 5 & -2 & 6 & \leftarrow (2-1) \\ 7 & -3 & 8 & \leftarrow (3-2) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{matrix}$$

niez.

$\operatorname{rk}(A) = 2$

$\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{3-2,\ 2-1} \begin{matrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$r(A|B) = 2$

$rk(A|B) = rk(A)$ jest rozw.

niesk. wiele

∞ wiele rozw. $\quad$ dim (ker (A)) = 3 - 2 = 1

$\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{3-2,\ 2-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\dots]{3-2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$rk(A|B) = 3 > rk(A)$

nie ma rozw.!

7.3 Metoda eliminacji Gaussa

Definicja 7.6 (Układy równoważne)**.** Układy równań $AX = B$ oraz $A'X = B'$ są *równoważne*, jeśli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Jak to policzyć wydajnie?

Lemat 7.7. *Rozważmy układ równań $AX = B$. Układ uzyskany przez następujące operacje przeprowadzone na macierzy rozszerzonej układu:*

- *zamianę i-tego oraz j-tego równania*
- *dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego*
- *przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$*

=> El. Gaussa na wierszach

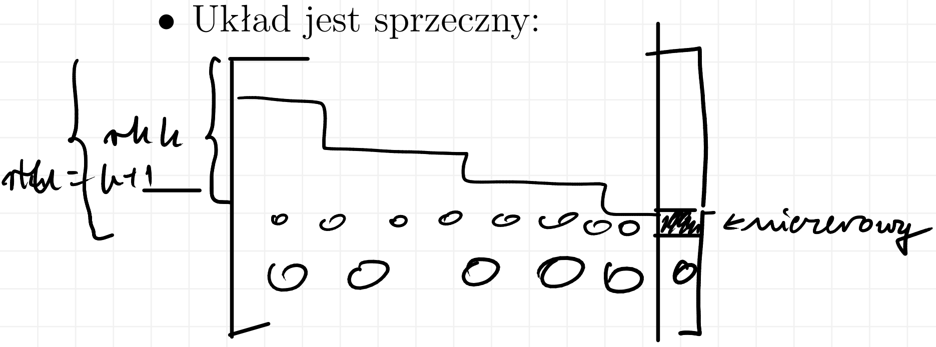
dają układ równoważny wejściowemu.

Prosty dowód pozostawimy jako ćwiczenie.

Oznacza to, że możemy stosować metodę eliminacji (wierszowej) na równaniu. Na końcu dostajemy macierz w postaci schodkowej (wierszowo).

Wtedy

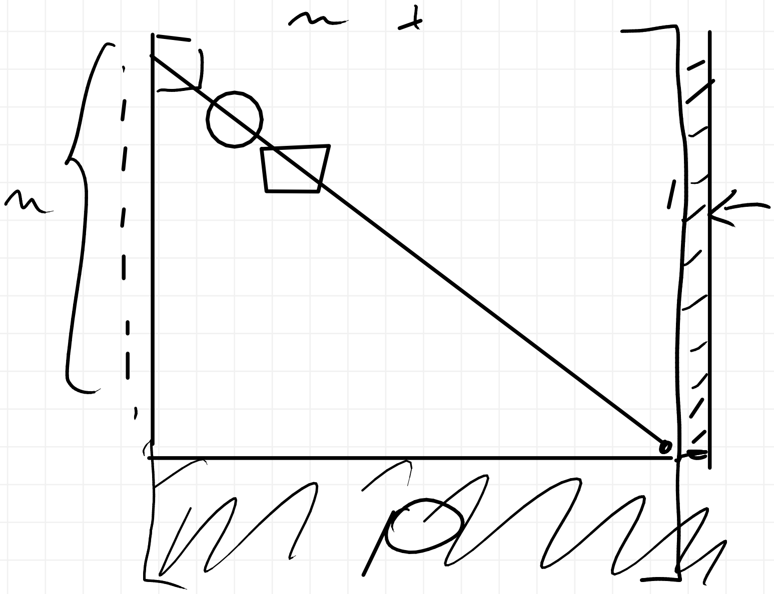
- Układ jest sprzeczny:



$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 3$

K-C

- Układ ma jedno rozwiązanie:

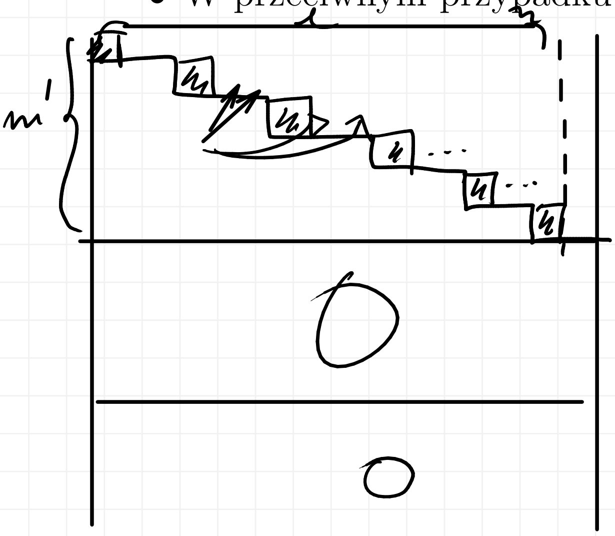


1 - rozw.

macierz odwracalna

$0x_1 + \dots + 0x_n = 0$

- W przeciwnym przypadku,



$m' < n$

$\mathrm{rk}(A) = m' < n$

$\dim(\ker(A)) = n - m' > 0$

1°) $\ker A$ ← obliczamy

$X_0 + \ker A$

konkretne

Za te extr. zm. podst. dow. stałe

Przykład 7.8 (Kontynuacja Przykładu 7.5). Przypomnijmy, że chcemy sprawdzić, ile rozwiązań, w zależności od parametru λ, ma układ:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & 1+\lambda \\ (6+\lambda^2)x_1 & -3x_2 & +(9-\lambda^2)x_3 & = & 3 \end{array}\right. .$$

Użyjemy tym razem eliminacji Gaußa:

$$3x_1 + 2 \quad + 3x_3 + \quad 8 + x_5 = 2$$

$$2x_3 \quad + 1 x_4 \quad - x_5 = 1$$

$$-x_5 = 7$$

$x_2 \leftarrow 1$

$x_4 \leftarrow 2$

$\cancel{x_1, x_2, x_3}$

x_1, x_3, x_5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 1+\lambda \\ 6+\lambda^2 & -3 & 9+\lambda^2 & 3 \end{array}\right]$$

$2-1$

$3-2$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & \lambda \\ \lambda^2-1 & & 1-\lambda^2 = 2(1-\lambda) & \\ & & \neq 0 & \end{array}$$

$1-\lambda = 0$

$\lambda = 1$

wiersz $\vec{0}$

$\lambda = -1$ ↯

$0 \dots 0$

$$\begin{array}{cccc} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

$\Leftarrow$ $rk(A) = 2$

$rk(A|B) = 2$

∞ wiele rozw.

$\lambda \notin \{-1, 1\}$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 1-\lambda & \\ 0 & -1 & -2 & 3\lambda-2 & 2-2\cdot(1) \\ & & 1+\lambda^2 = 2 & & 3-(1+\lambda)\cdot 1 \end{array}$$

jedno rozw

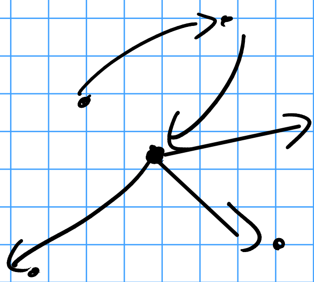
$$A : n \times n$$

$$A \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$\lambda \leftarrow$ stała

$$A^k \vec{x} = \lambda^k \vec{x}$$

Przykład



$v_i \rightarrow$ losowo do sąsiada

losowy wierz.

$$A \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} v_i = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

$$A \vec{x} = \vec{x}$$

Page Rank

$$A^k \vec{v} \rightsquigarrow \vec{x}$$

zbiega.

prędkość zbiegania

$$A \vec{x} = \vec{x}$$

$$A \vec{y} = \lambda \vec{y}, \quad \lambda \neq 1$$

$$f_0 \quad f_1 \quad , f_n$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

f_i

f_{i+1}

$$F \vec{x} = \lambda \vec{x}$$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{bmatrix} = F \cdot \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$$

$A =$

$A : F^n \to F^n$ $\quad n \times n$

$B \quad b_1 \, ... \, b_n$

$A \vec{b_i} = \lambda_i \vec{b_i}$

$A^k \vec{b_i} = \lambda_i^k \vec{b_i}$

Dla jakich?

$A = A^T$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad$ tak jest

G

Rozdział 8

Wartości własne

8.1 Wartość własna, wektor własny

Definicja 8.1 (Wartość własna, wektor własny). λ jest *wartością własną* macierzy M (dla wektora $\vec{V} \neq 0$), gdy $M\vec{V} = \lambda\vec{V}$. $\vec{V}$ jest *wektorem własnym* tej macierzy.

λ jest *wartością własną* przekształcenia liniowego F, jeśli $F(v) = \lambda v$ dla pewnego $v \neq \vec{0}$. Taki wektor v jest *wektorem własnym* F.

Fakt 8.2. *Jeśli λ jest wartością własną przekształcenia F wtedy i tylko wtedy gdy jest wartością własną $M_{BB}(F)$, dla dowolnej bazy B.*

v jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy $[v]_B$ jest wektorem macierzy $M_{BB}(F)$ dla wartości własnej λ.

1) $\underline{F(v) = \lambda \cdot v}$

$$\underline{M_{BB}(F)\ (v)_B} = (Fv)_B = (\lambda v)_B = \lambda \cdot \underline{(v)_B}$$

2)

4 4 6

Przykład 8.3. Przypomnijmy Przykład 5.10 i macierz

$F = F_A$ A
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ F A

$M_{BB}(F) = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$

Wiemy, że można przedstawić ją w postaci

$M_{BB}(F)E_1 = 4E_1$

$E_2 = 4E_2$

$E_3 = 6E_3$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{BE}} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}}_{M_{EB}}.$$

Co oznacza, że odpowiadające przekształcenie liniowe ma w bazie $[1,1,0]^T$; $[1,0,1]^T$; $[0,1,1$

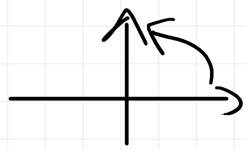
macierz $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. W takim razie ma ona wartości własne 4 (dla wektorów $[1,1,0]^T$, $[1,0,1]^T$) oraz 6 (dla wektora $[0,1,1]^T$).

$M_{EE}(F)$ 4 4 6

Wartości własne nie zawsze istnieją.

Przykład 8.4. Obrót $\mathbb{R}[2]$ o kąt 90^0 (w lewo). Jak wygląda macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Geometrycznie „widać”, że przekształcenie to nie ma wektorów własnych, czyli nie ma też ich jego macierz.

Z drugiej strony, jeśli potraktujemy ją jako macierz nad $\mathbb{C}$, to wtedy

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne zespolone to $i, -i$. Odpowiadające im wektory własne to odpowiednio $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

8.2 Macierze podobne

Przedstawienie macierzy M w postaci $A^{-1}NA$ gdzie A to macierz zmiany bazy ma dla nas na razie sens tylko w przypadku przekształceń liniowych. Ale ta własność jest jakoś pomocna również bez rozważania konkretnych baz i zmian baz.

Definicja 8.5 (Macierze podobne)**.** Macierze kwadratowe A, B są *podobne*, jeśli istnieje macierz odwracalna C, taka że

$$A = C^{-1}BC.$$

Oznaczamy to jako $A \sim B$.