9.2 Macierze dodatnie, PageRank

Aby zapewnić te warunki, zajmiemy się inną macierzą: dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M rozmiaru $n \times n$ oraz liczby $0 < m < 1$ definiujemy

$$M' = (1-m)M + m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

$M\vec{R} = \vec{R}$

suma 1

Dla odpowiedniej wartości m ranking tej macierzy to PageRank.

Fakt 9.8. *Macierz M' jest macierzą stochastyczną.*

$\vec{R}$

Uwaga. Macierz ta ma naturalną interpretację jako proces losowy: w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1-m$ losujemy krawędź wychodzącą, zaś z prawdopodobieństwem m losujemy jednorodnie jeden ze wszystkich wierzchołków.

Uwaga. Poniższe definicje oraz dowody dla macierzy dodatnich są prostszym wariantem ogólniejszego twierdzenia Frobeniusa-Perrona i jego dowodu.

Definicja 9.9. Mówimy, że macierz A jest *dodatnia*, co zapisujemy $A > 0$, jeśli wszystkie jej elementy są dodatnie.

$\vec{V} > 0$

Lemat 9.10. *Jeśli $A > 0$ i jest kolumnowo stochastyczna oraz $A\vec{V} = \vec{V}$ to $\vec{V} > 0$ lub $\vec{V} < 0$.*

Fakt $\vec{W} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ ma wsp. różnych znaków.

$\sum |w_i| > |\sum w_i|$ ← jasne.

$V \geq 0$

$A\vec{V} = \vec{V}$

V ma różne znaki

$$\underbrace{\sum_i |v_i|}_{} > \sum_i \sum_j \overset{\text{dod.}}{a_{ij}} |v_j| = \sum_j |v_j| \underbrace{\sum_i a_{ij}}_{1} = \underbrace{\sum |v_j|}_{}$$

$\sum_i |v_i| > \sum_j |v_j|$ ↯

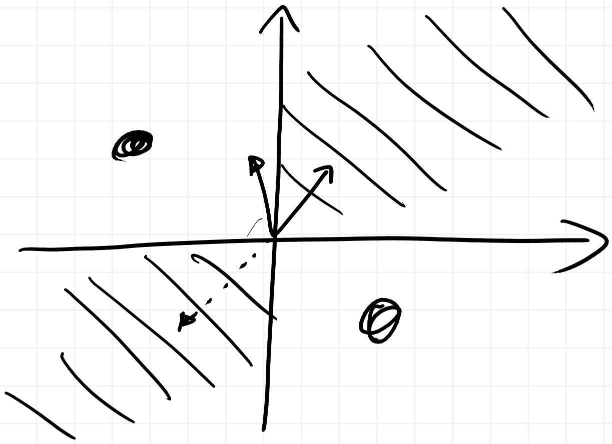
Co z 0?

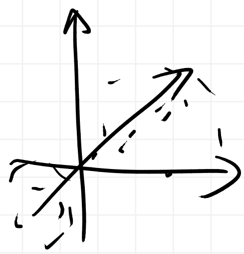
$v_i = \sum_j a_{ij} v_j$

0

dod. choć jedno

Lemat 9.11. *Dla dwóch niezależnych wektorów $\vec{S}, \vec{T} \in \mathbb{R}^n$ istnieje ich kombinacja liniowa, która ma pozycje różnych znaków.*





$S = [s_1 \dots s_n]^T$ $\qquad$ $\cancel{s_i = t_i} = 0$

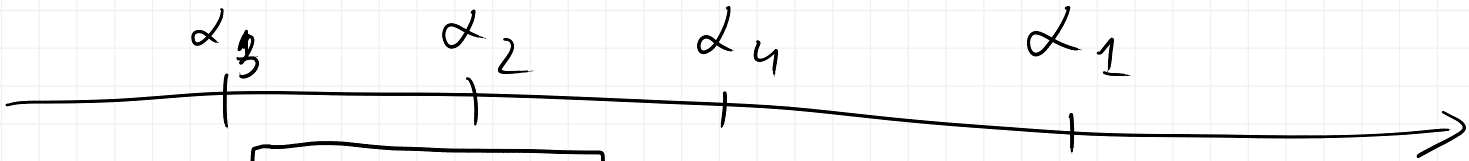
$T = [t_1 \dots t_n]^T$ $\qquad$ zakł, że $s_i \neq 0$ lub $t_i \neq 0$.

Jeśli S lub T ma wsp. różnych zn. to OK.

$S \geq 0$, $T \geq 0$

po wykreślaniu ≥ 2 wsp.

$\forall_i \; \alpha_i = \frac{s_i}{t_i}$ $\qquad$ $t_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = +\infty$



$\boxed{S - \alpha T}$ $\qquad$ $\alpha_i < \alpha < \alpha_j$

ściśle

nie ma punktów w środku

$\vec{S} - \alpha \vec{T}$

i

$\to s_i - \alpha \cdot t_i < 0$ $\qquad$ $\alpha > \frac{s_i}{t_i}$ $\qquad$ $\alpha < \frac{s_j}{t_j}$

$\to s_j - \alpha \cdot t_j > 0$ $\qquad$ $\alpha t_i > s_i$ $\qquad$ $\alpha t_j < s_j$

Twierdzenie 9.12. *Dla stochastycznej macierzy dodatniej A mamy* $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

Przypuśćmy, że nie A ma dwa niez. wekt. wł. dla 1

$\vec{S}, \vec{T}$

istnieje $\vec{V} \in \mathrm{LIN}(\vec{S}, \vec{T})$

$\Uparrow$

$\mathbb{V}_1$

$\vec{V}$ ma zarówno wsp > 0

wsp. < 0

↯

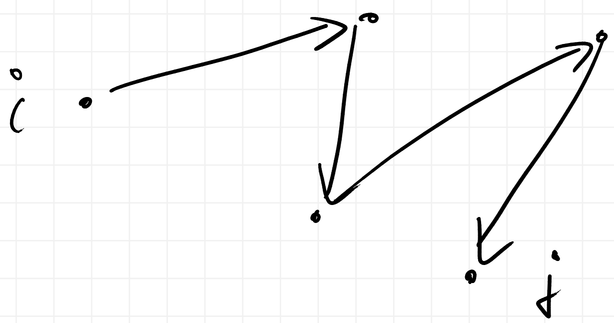
$\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

Ranking istnieje i jest jedyny!

9.3 Grafy silnie spójne

Jeśli dany na wejściu graf jest silnie spójny (czyli z każdego wierzchołka da się dojść do każdego innego), to można pokazać, że $\dim \mathbb{V}_1 = 1$ nawet dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa.

Definicja 9.13. Mówimy, że graf jest *silnie spójny*, jeśli dla każdej pary wierzchołków i, j istnieje ścieżka z i do j (oraz z j do i).



Uwaga: jeśli graf ma n wierzchołków, to ta ścieżka ma dł. $\leq n-1$. ↙ wsz. wierz. rozróżne

Choć wygląda niewinnie, w praktyce jest to bardzo silne założenie.

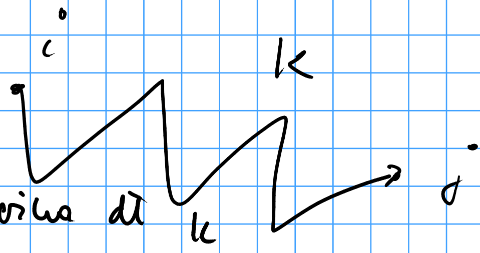
Lemat 9.14. *Dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M grafu silnie spójnego o n wierzchołkach macierz $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^i$ jest dodatnią macierzą stochastyczną.*

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^{i}}_{\text{macierz sto-chastyczna}} \leftarrow \text{i-ta pot.}$$

$M^i \leftarrow$ sto-ch.

$$\sum \frac{1}{n} M^i$$

Dodatnia



z i do j istnieje ścieżka dł k

$$(M^k)_{ji} \leftarrow \text{prawd. przejścia z } i \text{ do } j \text{ w } k \text{ krokach}$$

$$(M^k)_{ji} > 0$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum M^k\right)_{ji} > 0$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum M^k\right)_{ji} > 0$$

Lemat 9.15. *Jeśli $\vec{V}$ jest wektorem własnym znormalizowanej macierzy sąsiedztwa dla wartości* 1, *to jest nim też dla macierzy* $\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^i}$.

$M \quad \vec V \Leftarrow$ wektor wł. dla 1

$$M^k \vec V \qquad M^k \vec V = M \underbrace{M^{k-1}\vec V}_{\vec V} = M \vec V = \vec V$$

$$W \quad \lambda \qquad M^k \vec w = \lambda^k \vec w$$

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} M^k\right)\vec V = \frac{1}{n}\sum \left(M^k \vec V\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \vec V = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \vec V = \vec V$$

Twierdzenie 9.16. *Jeśli graf jest spójny, to jego znormalizowana macierz sąsiedztwa ma* $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

Ten wynik można wzmocnić, ale wymaga to głównie rozważań teorio-grafowych.

≥ 1

> 1

$$\cancel{W_1}\ \vec S, \vec T \in V_1$$

$$M' \nearrow \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} M^k\right)}_{\text{dodatnia, sto.ch.}} \qquad \dim \mathbb{V}_1' = 1$$

$$\mathbb{V}_1^{(M)} \subseteq \mathbb{V}_1^{(M')} \Leftarrow \text{wymiar } 1$$

$\dim(\mathbb{V}_1) = 1$ wymiar ≤ 1

≥ 1

9.4 Obliczanie rankingu

Pozostaje powiedzieć, jak można policzyć ranking dla macierzy stochastycznej dodatniej.

Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną.

9.4.1 Układ równań

Najprostsza obserwacja, to że skoro wymiar $\dim \mathbb{V}_1 = 1$,

$A > 0$
stoch

Fakt 9.17. *Układ równań*

$$(*) \quad \begin{cases} \underline{(A - \mathrm{Id})\vec{X}} & = \vec{0} \\ \underline{\sum_i x_i} & = 1 \end{cases} .$$

$A X = X$
$(A - \mathrm{Id}) \vec{X} = \vec{O}$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

- $(*)$ $(A - \mathrm{Id}) \vec{X} = \vec{O}$

$\underline{\mathbb{V}_1}$

dim rozwiązań $(*)$ 1

$\alpha \vec{V}$ $\quad \alpha \cdot$ „suma wsp v”

$\uparrow$
$\in \mathbb{R}$

Ten układ można więc rozwiązać problematyczny jednak jest jego rozmiar.

9.4.2 Metoda iteracyjna.

$(M')^k \vec{V} \rightsquigarrow \vec{R}$

Alternatywnie, chcemy pokazać, że można to policzyć jako granicę $(M')^k\vec{V}$ (dla sensownie wybranego $\vec{V}$).

Weźmy dowolny wektor $\underline{\vec{V} > 0}$ o sumie współrzędnych 1, niech $\vec{R}$ będzie rankingiem. Policzmy:

$V = \vec{R} + (\vec{V} - \vec{R})$

$$M^k\vec{V} = M^k\vec{R} + M^k(\vec{V} - \vec{R})$$
$$= \vec{R} + \underbrace{M^k(\vec{V} - \vec{R})}$$

suma wsp $= 0$

$V, R > 0$
suma wsp $= 1$

Chcemy więc sprawdzić, jak się zachowuje $M^k(\vec{V} - \vec{R})$. W ogólności ciężko coś powiedzieć, ale zauważmy, że skoro suma współrzędnych $\vec{V}, \vec{R}$ to 1, to $\vec{V} - \vec{R}$ ma sumę współrzędnych równą 0; analogicznie, również suma współrzędnych $M^k\vec{V}$ oraz $M^k\vec{R} = \vec{R}$ jest równa 1, czyli $M^k(\vec{V} - \vec{R})$ ma sumę współrzędnych równą 0.

M suma wsp. $= 0$

Zdefiniujmy $\mathbb{V}_{=0}$: przestrzeń liniową wektorów, których współrzędne sumują się do 0:

$$\mathbb{V}_{=0} = \{[v_1, \ldots, v_n]^T \ : \ \sum_i v_i = 0\} \ .$$

Fakt 9.18. $M^k(\underbrace{\vec{V} - \vec{R}}) \in \mathbb{V}_{=0}$.

Chcemy coś powiedzieć o „granicy” $\boxed{M^k\vec{W}}$ dla $\vec{W} \in \mathbb{V}_{=0}$. Skoro jest granica, to jest potrzebna jakaś odległość.

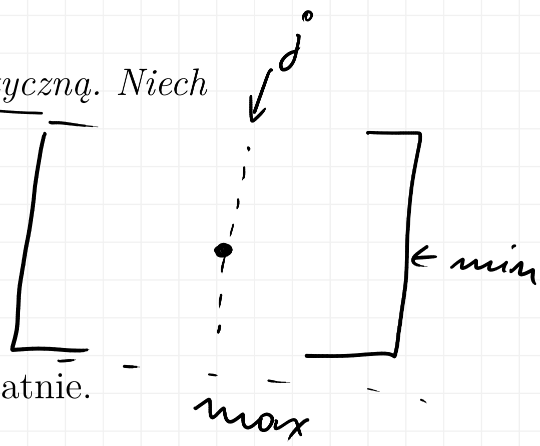
Definicja 9.19. Norma ℓ_1 $\| \cdot \|_1$ wektora $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$ to

$$\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \ .$$

$$\vec{V}_k \to \vec{V}$$

Lemat 9.20. *Niech A będzie dodatnia macierzą stochastyczną. Niech*

$$1 > a = \max_{1 \leq j \leq n} (1 - 2 \underbrace{\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}}_{>0}) \ .$$



Niech $\vec{0} \neq \vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$. Wtedy

$$\|AV\|_1 \leq a\|V\|_1 \ .$$

Uwaga. Niejawnie zakładamy, że $n > 1$, żeby a było dodatnie.

$$\|A^k V\|_1 \leq a^k \|V_1\|_1$$

$\vec{0} \neq \vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ ← ma dodatnie i uj. wsp.

$\vec{W} = A\vec{V}$ $\quad \vec{W} = [w_1, w_2, \ldots, w_n]^T$

$A \underset{\mathbb{V}_{=0}}{\vec{V}} = \underset{\mathbb{V}_{=0}}{W}$ $\quad \vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$

$$\|W\|_1 = \sum_{i=1}^{n} sgn(w_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} sgn(w_i) \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, sgn(w_i)$$

$$\leq \sum_j |v_j| \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, sgn(w_i) \right| \leq \sum_j |v_j| \cdot a = a \cdot \|V\|_1$$

$< a$

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1$

$\leq \underline{\sum_j |v_j|} \cdot$

1) $\vec{W} = \vec{0}$

2) $\vec{W} \neq \vec{0}$ którymś $sgn(w_i) = -1$

$= 1$

$\sum_i a_{ij} = 1$

$+ \cdot$

$- \cdot$

$+ \cdot$

$- \cdot$

$+ \cdot$

$+ \cdot$

$\underline{\sum_i a_{ij} \cdot sgn(w_i)}$

$\cdots \leq \sum_j |v_j| \cdot a = ||\vec{V_1}|| \cdot a$

$\sum a_{ij} = 1$

$\sum_{i \neq i_0} a_{ij} - a_{i_0 j} = \sum_i a_{ij} - 2 a_{i_0 j}$

Niestety, wartość a może (w ogólności) być wielomianowo mała w stosunku do grafu (zwłaszcza przy wielokrotnych krawędziach). Sprawia to, że w ogólności trzeba policzyć wielomianowo wiele iteracji, by zmniejszyć dwukrotnie odległość od rozwiązania. W praktyce jednak nie jest to potrzebne. W PageRanku jest jednak stała, wystarczy więc policzyć logarytmicznie wiele iteracji.

$a \leq 1 - \frac{1}{n}$

a^k

$a^n \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e}$

$\vec{V}$ $\quad \frac{1}{e}$

$n^2 \quad \left(\frac{1}{e}\right)^n$

Zauważmy też, że obliczanie $M'\vec{V}$ jest prostsze ze względu na strukturę M': nasza dodatnia macierz stochachastyczna jest w istocie macierzą

$$\underline{(1-m)M} + m \underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}}.$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} M'\vec{V} &= \underline{(1-m)M\vec{V}} + m \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \vec{V}}_{\text{stały}} \\ &= (1-m)M\vec{V} + \begin{bmatrix} \frac{m}{n} \\ \frac{m}{n} \\ \vdots \\ \frac{m}{n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

.

Zauważmy, że ten iloczyn liczy się dużo prościej: macierz M jest dość rzadka. Co więcej, liczenie można zrównoleglić (każdy element $M\vec{V}$ może być liczony osobno).

Rozdział 10

Iloczyn skalarny

Chcemy uogólnić pojęcia odległości, prostopadłości, kąta na dowolną przestrzeń. W tym celu zajmiemy się *iloczynem skalarnym.*

10.1 Standardowy iloczyn skalarny

Przykład 10.1 (Standardowy iloczyn skalarny). Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz wielu $\mathbb{F}^n$ (ale nie $\mathbb{C}^n$) definiujemy iloczyn skalarny jako:

$$\langle (v_1, \ldots, v_n), (u_1, \ldots, u_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$$

$\vec{v}^T \cdot \vec{u}$

$\langle (1,1)(1,-1) \rangle = 1 - 1 = 0$

Dla $\mathbb{C}^n$ definiujemy zaś:

$$\langle (v_1, \ldots, v_n), (u_1, \ldots, u_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{u_i}$$

Dla $\mathbb{R}^n$ czy $\mathbb{C}^n$ możemy go użyć do zdefiniowania (standardowej) długości, odległości oraz prostopadłości, kąta:

długość Długość (norma) wektora v to

$$\|v\| = \underline{\sqrt{\langle v, v \rangle}}$$

$\langle v, v \rangle$ $\sqrt{\sum v_i^2}$

odległość Odległość między wektorami u, v to

$$\|u - v\|$$

kąt Kąt między wektorami u, v to $\alpha \in [0, \pi]$ spełniające warunek

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|}$$

prostopadłość Dwa wektory u, v są prostopadłe, jeśli

$$\langle v, u \rangle = 0$$

Ta definicja prostopadłości okaże się przydatna nawet wtedy, kiedy kąt czy długość nie mają wiele sensu.

10.2 Ogólny iloczyn skalarny

Chcemy uogólnić to na ogólne przestrzenie. W zasadzie to rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$, informacyjnie nad $\mathbb{C}$.

Popatrzymy od innej strony: co musi spełniać funkcja dwóch zmiennych, by być iloczynem skalarnym.

Definicja 10.2 (Iloczyn skalarny). *Iloczyn skalarny* to funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \mapsto \mathbb{F}$ (gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$) spełniająca warunki:

(SK1) liniowa po pierwszej współrzędnej $\langle \alpha v, u\rangle = \alpha\langle v, u\rangle$
$\langle v+v', u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v', u\rangle$

(SK2) symetryczna, tj. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$; (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub antysymetryczny $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).
$\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ $\mathbb{R}$
$\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ $\mathbb{C}$

(SK3) $\langle v, v\rangle > 0$ dla $v \neq \vec{0}$.

Przestrzeń liniową, która ma tak określony iloczyn skalarny, nazywamy *przestrzenią Euklidesową* (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub *unitarną* (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle}$

To pozwala na zdefiniowanie prostopadłości oraz długości.

Definicja 10.3 (Wektory prostopadłe). Dwa wektory u, v są *prostopadłe*, gdy $\langle u, v\rangle = 0$. Zapisujemy to też jako $u \perp v$.

Ostatni warunek ma sens dla $\mathbb{C}$, bo wartość jest samosprzężona. Dla innych ciał ostatni warunek może nie mieć sensu.

Definicja 10.4 (Długość i odległość). W przestrzenie Euklidesowej (unitarnej):
Norma (*długość*) wektora u to $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$.
Odległość między u a v to norma z $(u - v)$.

Przykład 10.5.
- Tradycyjny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ spełnia te warunki.
- W przestrzeni wielomianów (nad $\mathbb{R}$) jako iloczyn skalarny można wziąć całkę (po odpowiednim zakresie):

$\mu(x)$

$$\langle u, v\rangle = \int_I u(x)v(x)dx$$

$\langle u, u\rangle = \int u^2(x)dx$

← wiel.

Iloczyn skalarny ma wiele dobrych własności:

Lemat 10.6. *Jeśli $\mathbb{V}$ jest przestrzenia Euklidesową (unitarną), to:*

1. $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$
2. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ *(Nierówność Cauchy-Schwartz); równość* $\iff$ *są liniowo zależne*
3. $\|u + w\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(Nierówność Minkowsky)*
4. $\|v\| - \|w| \leq \|v - w\|$

• $\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$

$\sqrt{\langle \alpha u, \alpha u\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u,u\rangle} = |\alpha|\cdot\|u\|$

• $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\cdot\|v\|$ rów $\overset{\Leftarrow}{\Leftrightarrow}$ liniowo zal.

$u = \alpha\cdot v$

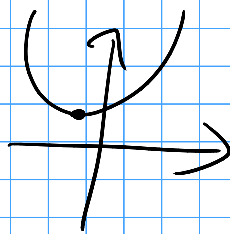
$|\langle \alpha v, v\rangle| = |\alpha \cdot \langle v,v\rangle| = |\alpha|\cdot\|v\|^2$

$\|u\| = |\alpha|\cdot\|v\|$

jeśli u, v – niez., to $<$

$u - \alpha v \neq \vec{0}$

$\langle u-\alpha v, u-\alpha v\rangle > 0$ $\Leftarrow$ funkcja α kwadratowa



$\langle u,u\rangle - 2\alpha\langle u,v\rangle + \alpha^2\langle v,v\rangle > 0$

Δ jest ujemna

$b \leftarrow -2\langle u,v\rangle$

$b^2 - 4ac$

$\langle u,v\rangle^2 - \langle v,v\rangle\langle u,u\rangle < 0$

$\langle u,v\rangle^2 < \underbrace{\langle v,v\rangle}_{>0}\underbrace{\langle u,u\rangle}_{>0}$ $/\sqrt{\ }$

$|\langle u,v\rangle| < \|v\|\cdot\|u\|$

Ad 3 $\|u+w\|^2 \le (\|u\|+\|w\|)^2$

$\langle u+w, u+w\rangle = \underbrace{\langle u,u\rangle}_{\|u\|^2} + 2\langle u,w\rangle + \underbrace{\langle w,w\rangle}_{\|w\|^2}$

$\le \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|w\| + \|w\|^2$

$= (\|u\|+\|w\|)^2$

Ad 4

$\|v\| - \|w\| \le \|v-w\|$

$\|v\| \le \|v-w\| + \|w\|$ z (3) dla $v-w$, w

Z nierówności Schwarza (dla liczb rzeczywistych) mamy

$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}} \leq 1$$

I tym samym możemy zdefiniować *kąt* miedzy wektorami

Definicja 10.7. W przestrzeni Euklidesowej (unitarnej) dla wektorów u, v kąt między nimi to jedyne takie $\alpha \in [0, \pi]$, że

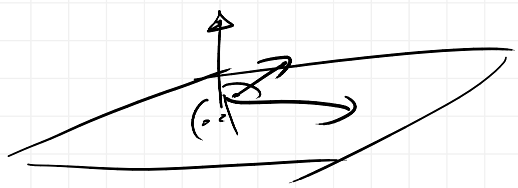
$$\cos \alpha = \frac{\overset{0}{\langle u, v\rangle}}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

10.3 Baza ortonormalna, dopełnienie ortogonalne

Definicja 10.8 (Dopełnienie ortogonalne)**.** Niech $U \subseteq \mathbb{V}$ będzie podzbiorem przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej). Wtedy *dopełnienie ortogonalne* U to:

$$U^{\perp} = \{v \in \mathbb{V} \ : \ \forall_{w \in U}\, v \perp w\}$$

Fakt 10.9. *Jeśli B jest bazą $\mathbb{W}$ to $v \in \mathbb{W}^{\perp}$ wtedy i tylko wtedy, gdy v jest prostopadły do każdego wektora z B.*



$u \in W^{\perp} \implies$ u pr. do wekt. z B.

$\impliedby \quad \forall_{b \in B} \quad \langle \vec{u}, \vec{b}\rangle = 0$

$\forall\, \omega \in \vec{W} \qquad \omega = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{b_i}$

$$\langle u, \omega\rangle = \langle u, \sum_i \alpha_i b_i\rangle = \sum_i \alpha_i \overbrace{\langle u, b_i\rangle}^{0} = \sum \alpha_i \cdot 0 = 0$$

$u \in W^{\perp}$

Lemat 10.10. *Niech $U \subseteq \mathbb{V}$, gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Euklidesową (lub unitarną). Wtedy*

- $U^{\perp} \leq \mathbb{V}$ *jest przestrzenią liniową.*
- $U \cap (U^{\perp}) \subseteq \{\vec{0}\}$
- $(U^{\perp})^{\perp} \supseteq U$

- $U^\perp \leq V$

$\cancel{\forall u}$, $\omega \in U^\perp$

$\alpha\omega \quad \langle \alpha\omega, \overset{U}{\underset{\Downarrow}{u}} \rangle = \alpha \overbrace{\langle \omega, u \rangle}^{0} = 0$

$\langle \underset{U^\perp}{\omega} + \underset{U^\perp}{\omega'}, u \rangle = \underset{0}{\langle \omega, u \rangle} + \underset{0}{\langle \omega', u \rangle} = 0$

- $U \cap \underset{w}{U^\perp} \subseteq \{\vec{0}\}$

$\forall u \in U$

$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

- $U \subseteq (U^\perp)^\perp$

$\forall \underline{w \in U^\perp}$

$\forall \underline{\underline{u}} \in U \quad \langle w, u \rangle = 0$

$\underline{\underline{u}} \in \boxed{(U^\perp)^\perp}$

Definicja 10.11 (Układ (baza) ortogonalny, układ (baza) ortonormalny)**.** Układ wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ jest *układem ortogonalnym*, jeśli dla $i \neq j$ mamy $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Jest układem *ortonormalnym*, jeśli dodatkowo $\langle v_i, v_i \rangle = 1$. ←

Analogicznie definiujemy bazę ortogonalną i ortonormalną.

To jest w pewnym sensie odpowiednik bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 10.12. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną). Wtedy $\mathbb{V}$ ma bazę ortonormalną.*

Dowód wynika z bardziej technicznego lematu:

Lemat 10.13. *Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni Euklidesowej (unitarnej) $\mathbb{V}$ oraz niech B będzie bazą ortogonalną $\mathbb{W}$. Wtedy istnieje baza ortogonalna $B \cup B'$ przestrzeni $\mathbb{V}$.*

$W \leqslant V$ 1) $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ OK.

2) $\mathbb{W} \nsubseteq \neq \mathbb{V}$

$W^{\perp}$ ← dopełnienie ortogonalne (niepuste ...) ćwiczenie.

$b' \in W^{\perp}$, $\neq 0$

$\vec{b}' \in W^{\perp} \cap W \subseteq \{\vec{0}\}$

$B \cup \{b'\}$ ← niezależne ortogonalne

$B \cup \{b'\}$ ← baza ort. większej prz.

V

$W \nsubseteq \neq V$

$v \notin \mathbb{W}$

$\vdots$

$\Sigma v -$

V

$\vec{b} \neq \vec{0}$

Lemat 10.14. *Jeśli $b_1, \ldots, b_n$ jest bazą ortonogonalną przestrzeni Euklidesowej lub unitarnej $\mathbb{V}$, to*

$$\mathrm{LIN}(b_1, \ldots, b_k)^{\perp} = \mathrm{LIN}(\underbrace{b_{k+1}, \ldots, b_n}_{n-k}) \ .$$

W szczególności, jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ to

$$\overset{n-k}{\dim(\mathbb{W}^{\perp})} = \overset{n}{\dim \mathbb{V}} - \overset{k}{\dim \mathbb{W}} \ .$$

• $\mathrm{LIN}(b_{k+1}, \ldots, b_n) \leq (\mathrm{LIN}(b_1 \ldots b_k))^{\perp}$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overbrace{\langle b_i , b_j \rangle}^{0} = \sum \alpha_i \cdot 0 = 0$$

$j < k$

• $w \in V \setminus \mathrm{LIN}(b_{k+1}, \ldots, b_n)$

$(w)_B$: α_i, $i \leq k$, $\alpha_i \neq 0$; $k+1, \ldots, n$

$$\langle w, b_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle b_j , b_i \rangle}_{\substack{0 \ j \neq i \\ \neq 0 \ i = j}} = \underset{\substack{\# \\ 0}}{\alpha_i} \cdot \underbrace{\langle b_i, b_i \rangle}_{> 0} \neq 0$$

Lemat 10.15. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie-wymiarową przestrzenia Euklidesową (lub unitarną) oraz niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Wtedy*

- $(\mathbb{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbb{W}$.
- $\mathbb{W} + \mathbb{W}^{\perp} = \mathbb{V}$
- *dla każdego wektora $v \in \mathbb{V}$ reprezentacja $v = w + w^{\perp}$, gdzie $w \in \mathbb{W}$ i $w^{\perp} \in \mathbb{W}^{\perp}$ jest jedyna.*

- $W \leq (W^{\perp})^{\perp}$

  $\dim((W^{\perp})^{\perp}) = n - \dim(W^{\perp}) = n - (n - \dim(W))$
  $= \dim(W)$

- $W + W^{\perp} = V$

  $\dim(W + W^{\perp}) = \underset{k}{\dim}(W) + \underset{n-k}{\dim}(W^{\perp}) \cancel{- \dim(\underbrace{W \cap W^{\perp}}_{\{\vec{0}\}})}$, $W \cap W^{\perp} = 0$

  $= n = \dim(V)$

- $v \in V$ $\quad W, W^{\perp}$ $\quad v = w^{\in W} + w_{\perp}^{\in W^{\perp}}$

  $W + W^{\perp} = V$

  $w + w_{\perp} = w' + w_{\perp}'$

  $\underbrace{w - w'}_{\in W} = \underbrace{w_{\perp}' - w_{\perp}}_{\in W^{\perp}} = \vec{0}$

Lemat 10.16. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną), $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bazą ortonormalną a v wektorem wyrażanym w tej bazie jako*

$$\boxed{v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i.}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = v_i$$

Wtedy

$$\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$$

$$\langle v, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle}_{\substack{0 \ i \neq j \\ 1 \ i = j}} = \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1} = \alpha_i$$

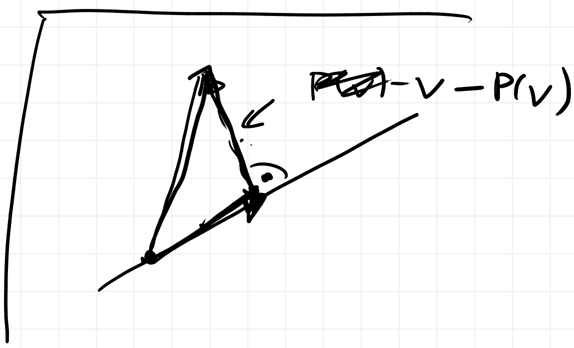
Lemat 10.17. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną). Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem linowym, zaś $B = v_1, \ldots, v_n$ bazą ortonormalną. Wtedy $M_{BB}(F) = (\langle F(v_j), v_i \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$.*

$$F : V \to V$$

$$F(v_i)_B$$

$$M_{BB}(F) = (\langle F(v_j), v_i \rangle)_{i,j=1\ldots n}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} F(v_1)_B & F(v_2)_B & \cdots & F(v_n)_B \end{array}\right]$$
$$\shortparallel$$
$$\begin{bmatrix} \langle Fv_1, v_1 \rangle & \langle Fv_2, v_1 \rangle & \langle Fv_n, v_1 \rangle \\ \langle Fv_1, v_2 \rangle & \langle Fv_2, v_2 \rangle & \vdots \\ \vdots & \vdots & \\ \langle Fv_1, v_n \rangle & & \langle Fv_n, v_n \rangle \end{bmatrix}$$



10.4 Rzuty i rzuty prostopadłe.

Definicja 10.18 (Rzut, rzut prostopadły). *Rzutem* nazywamy przekształcenie liniowe $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ takie że $P^2 = P$. O rzucie P mówimy, że jest *rzutem na podprzestrzeń* $\operatorname{Im} P$.

Rzut jest rzutem *prostopadłym* jeśli dla każdego v mamy $P(v) \perp (v - P(v))$.

Lemat 10.19. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną) i $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$. Rzut prostopadły na $\mathbb{W}$ jest zdefiniowany jednoznacznie.*

Niech $P : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W}$. Jeśli $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ jest bazą ortogonalną $\mathbb{W}$ zaś $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$: przestrzeni $\mathbb{V}$, to

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{b}_i\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{b}_i}_{\in W} .$$

$v - P(v) \in W^{\perp}$

$\sum_{i=k+1} \alpha_i b_i$

Uwaga. Zauważmy, że skoro $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ jest bazą, to to definiuje P na całej przestrzeni $\mathbb{V}$.

Wniosek 10.20. Dla wektora v oraz P — rzutu prostopadłego na $\mathbb{W}$ — para $P(v)$, $v - P(v)$ jest rozkładem v na elementy z $\mathbb{W}$, $\mathbb{W}^{\perp}$.

Rzut jest zdef. jednoznacznie.

$B = b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n$

$P(b_i) = b_i \quad i \leq k$

$\operatorname{Im} P = W$

$\exists w_i \quad P(w_i) = \vec{b}_i \quad i \leq k$

$P^2(w_i) = P(\underbrace{P(w_i)}_{b_i}) = P(b_i)$

$P(w_i) = b_i$

$P(b_i) = \vec{0} \quad i > k$

$0 = \langle b_i - P(b_i), P(b_i) \rangle$

$= \underbrace{\langle \underset{W^{\perp}}{b_i}, \underset{W}{P(b_i)} \rangle} - \langle P(b_i), P(b_i) \rangle$

$0 = - \underbrace{\langle P(b_i), P(b_i) \rangle}_{0} \quad P(b_i) = \vec{0}.$

$P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i$

że to jest faktycznie rzut prost.