Lista 11

Zadanie 1. Na podstawie poniższych tabel działań określ, który zbiór z działaniem jest grupą.

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	a	b

,

$\cdot$	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

,

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	b	a	c

,

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	d	a	c
c	c	a	d	b
d	d	b	a	c

.

Zadanie 2. Podaj tabelkę działań grupy obrotów i symetrii kwadratu.

Zadanie 3. Rozważamy trzy grupy:

1. grupą symetrii trójkąta równobocznego (trzy obroty i trzy symetrie osiowe);
2. grupą obrotów sześciokąta foremnego;
3. grupą $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ (czyli z dodawaniem $\bmod 6$).

Przedstaw ich tabelki działań. Które z tych grup są izomorficzne?

Zadanie 4. Pokaż, że dla $x_1, \dots, x_k$: elementów grupy G oraz liczb całkowitych $z_1, \dots, z_k$ zachodzi:

$$(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1} = (x_k)^{-z_k} (x_{k-1})^{-z_{k-1}} \cdots (x_1)^{-z_1} \quad .$$

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie izomorfizmy pomiędzy grupą obrotów kwadratu, a grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Wskazówka: Pokaż, że izomorfizm zachowuje rząd elementu.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli każdy element w grupie jest odwrotny do siebie, to grupa jest przemienna.

Zadanie 7. Pokaż, że, z dokładnością do izomorfizmu, istnieje tylko jedna grupa trzyelementowa (dokładniej: $(\mathbb{Z}_3, +)$) oraz dwie grupy czteroelementowe: $(\mathbb{Z}_4, +)$ oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ z dodawaniem po współrzędnych.

Wskazówka: W drugim punkcie: jakie są możliwe rzędy elementów?

Zadanie 8. Niech H_1 i H_2 będą podgrupami grupy G.

- Pokaż, że $H_1 \cup H_2$ nie musi być podgrupą G.
- Pokaż, że jeśli $H_1 \cup H_2$ jest podgrupą G, to $H_1 \leq H_2$ lub $H_2 \leq H_1$.
- Pokaż, że jeśli G jest przemienna, to $\langle H_1 \cup H_2 \rangle = \{h_1 h_2 \ : \ h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2\}$.
  (Dla przypomnienia: $\langle A \rangle$ to najmniejsza grupa generowana przez A.)

Zadanie 9 (Nie liczy się do podstawy). Pokaż, że podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.

Wskazówka: Rozważ najmniejszą potęgę generatora, która należy do podgrupy. Pokaż, że jest to generator.

Zadanie 10. Centralizatorem elementu a w grupie G nazywamy zbiór elementów przemiennych z a, czyli

$$G(a) = \{b \in G \ : \ ab = ba\} \quad .$$

Centrum grupy G nazywamy zbiór

$$Z(G) = \{a \ : \ \forall b \in G : \ ab = ba\}$$

(czyli: przemiennych ze wszystkimi elementami w G). Udowodnij, że dla dowolnej grupy G i elementu a centralizator $G(a)$ oraz centrum $Z(G)$ są podgrupami G. Pokaż też, że

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} G(g) \quad .$$

Zadanie 11. Pokaż, że zbiór symetrii trójkąta równobocznego jest izomorficzny z grupą wszystkich permutacji zbioru trzyelementowego S_3.