Algebra
notatki do przedmiotu

Edycja 2024/25

Spis treści

I Algebra Liniowa **7**

1 Ciała, przestrzenie liniowe, liniowa niezależność, eliminacja Gauβa **9**
1.1 Ciała . . . 9
1.2 Przestrzenie liniowe . . . 9
1.3 Podprzestrzenie liniowe . . . 11
1.4 Kombinacje liniowe wektorów . . . 12
1.5 Liniowa niezależność wektorów. . . . 13
1.6 Metoda eliminacja Gauβa. . . . 14

2 Baza przestrzeni liniowej, wymiar **17**
2.1 Baza przestrzeni liniowej . . . 17
2.2 Wyrażanie wektora w bazie . . . 18
2.3 Wymiar przestrzeni liniowej . . . 21
2.4 Zastosowanie eliminacji Gauβa do liczenia wymiaru . . . 22
2.4.1 Wybór bazy . . . 23
2.5 Warstwy . . . 23

3 Przekształcenia liniowe **27**
3.1 Przekształcenia liniowe . . . 27
3.2 Jądro i obraz przekształcenia liniowego . . . 28

4 Macierze **31**
4.1 Podstawowe operacje na macierzach . . . 31
4.1.1 Ważne i ciekawe macierze . . . 31
4.1.2 Zestawianie macierzy . . . 32
4.1.3 Mnożenie macierzy . . . 33
4.1.4 Transpozycja . . . 34
4.2 Wartości na wektorach jednostkowych . . . 34
4.3 Operacje elementarne . . . 35
4.4 Przekształcenie liniowe dla macierzy . . . 37
4.5 Rząd macierzy . . . 37
4.6 Obliczanie bazy jądra przekształcenia . . . 39
4.7 Macierz odwrotna . . . 40
4.8 Jeszcze o eliminacji Gauβa . . . 41
4.9 Metoda algorytmiczna obliczania macierzy odwrotnej . . . 42

5 Przekształcenia liniowe i macierze **43**
5.1 Wyrażanie przekształcenia liniowego w bazie . . . 43
5.2 Macierz zmiany bazy . . . 44

6 Wyznacznik **47**
6.1 Wyznacznik . . . 47
6.2 Własności i metody obliczania wyznacznika . . . 48
6.3 Wyznacznik a macierz odwrotna . . . 52
6.4 Wyznacznik przekształcenia . . . 52

7 Układy równań liniowych i ich rozwiązywanie **55**
7.1 Interpretacja „pionowa” . . . 55
7.2 Interpretacja „pozioma” . . . 55
7.3 Bazowy przypadek: n zmiennych, n równań, macierz odwracalna . . . 55
7.4 Ogólne układy równań liniowych . . . 56
7.4.1 Układy jednorodne . . . 56
7.4.2 Układy niejednorodne . . . 57
7.5 Metoda eliminacji Gaussa . . . 58

8 Wartości własne **61**
8.1 Wartość własna, wektor własny . . . 61
8.2 Macierze podobne . . . 62
8.3 Wielomian charakterystyczny . . . 63
8.4 Krotności: algebraiczna i geometryczna. . . . 64
8.5 Macierze diagonalizowalne, przekształcenia diagonalne . . . 65
8.6 Macierz Jordana . . . 66
8.7 Macierze symetryczne . . . 67
8.8 Eigenfaces raz jeszcze, PCA . . . 67

9 PageRank **69**
9.1 Macierze sąsiedztwa, ranking . . . 69
9.2 Macierze dodatnie, PageRank . . . 71
9.3 Obliczanie rankingu . . . 72
9.3.1 Układ równań . . . 72
9.3.2 Metoda iteracyjna. . . . 72
9.4 Dowód zbieżności przy użyciu macierzy Jordana . . . 74
9.5 Grafy silnie spójne . . . 77

10 (Standardowy) iloczyn skalarny **79**
10.1 Standardowy iloczyn skalarny . . . 79
10.2 Dopełnienie ortogonalne . . . 81
10.3 Zastosowanie: kody korekcyjne . . . 82

11 Ogólny iloczyn skalarny **83**
11.1 Baza ortonormalna . . . 84
11.2 Dopełnienie ortogonalne . . . 86
11.3 Rzuty i rzuty prostopadłe. . . . 88
11.4 Algorytm Grama-Schmidta ortonormalizacji bazy . . . 88
11.5 Zastosowania: geometria . . . 90
11.5.1 Reprezentacja przez dopełnienie ortogonalna . . . 90
11.5.2 Symetrie . . . 90
11.5.3 Regresja liniowa . . . 91

12 Izometrie, macierze ortogonalne **93**
12.1 Izometrie . . . 93
12.2 Macierze ortogonalne . . . 93

13 Macierze dodatnio określone **95**
13.1 PCA raz jeszcze . . . 99

II Algebra Abstrakcyjna **101**

14 Grupy **103**
14.1 Automorfizmy . . . 103
14.2 Grupa . . . 103
14.2.1 Półgrupy . . . 104

14.3 Tabelka działań (mnożenia) . . . 104
14.4 Homomorfizm, Izomorfizm . . . 105
14.5 Rząd elementu . . . 105
14.6 Podgrupy . . . 106
14.7 Grupa cykliczna . . . 107
14.8 Grupa wolna . . . 107

15 Grupy permutacji **111**
15.1 Rozkład permutacji na cykle . . . 111
15.2 Permutacje parzyste i nieparzyste. . . . 113
15.3 Wyznacznik . . . 114

16 Działania grupy na zbiorze **115**
16.1 Mnożenie podzbiorów grupy . . . 115
16.2 Działanie grupy na zbiorze . . . 115
16.3 Lemat Burnside'a . . . 116

17 Warstwy, Twierdzenie Lagrange'a **119**
17.1 Warstwy . . . 119

18 Homomorfizmy i grupy ilorazowe, podgrupy normalne. Temat ominięty na wykładzie **123**
18.1 Homomorfizmy . . . 123
18.2 Działanie na warstwach . . . 124
18.3 Naturalny homomorfizm $G \mapsto G/H$. . . . 125
18.4 Kongruencje, konstrukcja $\mathbb{Z}_n$ . . . 125
18.4.1 Konstrukcja $\mathbb{Z}_m$ . . . 125

19 Pierścienie, ciała, arytmetyka modularna **127**
19.1 Pierścienie . . . 127
19.2 Arytmetyka modularna $\mathbb{Z}_m$ . . . 127
19.3 Algorytm Euklidesa . . . 129
19.4 Elementy odwracalne . . . 130
19.5 Chińskie twierdzenie o resztach . . . 131
19.6 Zastosowanie: Algorytm szyfrowania Rabina . . . 132
19.6.1 Odtwarzanie . . . 133
19.6.2 Odtwarzanie implikuje rozkład liczby na czynniki . . . 133

20 Wielomiany **135**
20.1 Pierścień wielomianów . . . 135
20.2 Ewaluacja (wartościowanie) wielomianów . . . 136
20.3 Dzielenie, podzielność i największy wspólny dzielnik wielomianów . . . 136

21 Ciała, rozszerzenia ciał **141**
21.1 Charakterystyka ciała, ciało proste . . . 141
21.2 Konstrukcja ciał (skończonych) . . . 142
21.3 Ciała algebraicznie domknięte . . . 145
21.4 Rozszerzenia ciał . . . 145
21.4.1 Rozszerzenie przestępne . . . 145
21.4.2 Rozszerzenia algebraiczne . . . 145
21.5 Wielomiany minimalne nad ciałami skończonymi . . . 146

22 Skończone $\mathbb{F}^*$ jest cykliczne **149**
22.1 Rzędy elementów w grupie cyklicznej . . . 149
22.2 Rzędy elementów w $\mathbb{F}^*$ . . . 150

Część I

Algebra Liniowa

Rozdział 1

Ciała, przestrzenie liniowe, liniowa niezależność, eliminacja Gauß a

1.1 Ciała

Przestrzenie liniowe to uogólnienie $\mathbb{R}^n$. W tym uogólnieniu najpierw chcemy uogólnić samo pojęcie liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, tak, aby obejmowało znane nam naturalne przykłady: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$ (dla pierwszego p). Takie wspólne uogólnienie to *ciało*, oznaczane ogólnie jako $\mathbb{F}$. Dokładne własności ciał omówimy w odpowiednim momencie, na razie pozostaniemy przy istotnych przykładach.

Przykład 1.1. Ciałami są: liczby rzeczywiste ($\mathbb{R}$), liczby wymierne ($\mathbb{Q}$), liczby zespolone ($\mathbb{C}$), reszty modulo p ($\mathbb{Z}_p$) dla p — liczby pierwszej.

Poza $\mathbb{Z}_p$ działania określamy w naturalny sposób. W $\mathbb{Z}_p$ działania $\cdot_p$ oraz $+_p$ określamy jako:

- $a +_p b = (a + b) \bmod p$
- $a \cdot_p b = (a \cdot b) \bmod p$

gdzie $a \bmod p$ oznacza resztę z dzielenia a przez p. (Dla przypomnienia, b jest resztą z dzielenia $a \in \mathbb{Z}$ przez p, jeśli $0 \leq b < p$ i istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka że $cp + b = a$).

W ciele są dwie operacje: mnożenie "$\cdot$" i dodawanie "$+$", są one przemienne i zachowują się tak, jak intuicyjnie oczekujemy. Są też dwa wyróżnione elementy $0, 1$, które w naszych przykładach pokrywają się z tradycyjnie rozumianymi wyróżnionymi 0 i 1 i mają te same własności, tj. $1 \cdot \alpha = \alpha$ oraz $0 + \alpha = \alpha$.

W ciele przez $-\alpha$ rozumiemy element taki, że $\alpha + (-\alpha) = 0$ a przez α^{-1} dla $\alpha \neq 0$ (pisane też jako $\frac{1}{\alpha}$) taki, że $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$. W ciałach $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ oba te elementy wyglądają tak, jak się spodziewamy, w $\mathbb{Z}_p$ sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana.

1.2 Przestrzenie liniowe

O przestrzeni liniowej chcemy myśleć, iż jest to uogólnienie $\mathbb{R}^n$. Jej elementy nazywamy *wektorami* i myślimy, że są to punkty w $\mathbb{R}^n$, ale traktowane jako wektory, tzn. możemy je dodawać i mnożyć przez elementy z $\mathbb{R}$, jest to mnożenie przez *skalary*.

Definicja 1.2. Zbiór $\mathbb{V}$ jest *przestrzenią liniową nad ciałem* $\mathbb{F}$, jeśli:

1. W $\mathbb{V}$ określone jest dodawanie
$$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$$
2. Dodawanie w $\mathbb{V}$ jest przemienne, tj.:
$$\forall_{\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{V}} \vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$$
3. Dodawanie w $\mathbb{V}$ jest łączne:
$$\forall_{\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{V}} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

   W związku z tym dodawanie w $\mathbb{V}$ zapisujemy bez nawiasów.

4. W $\mathbb{V}$ istnieje wyróżniony wektor $\vec{0}$:
$$\exists_{\vec{0}\in\mathbb{V}}\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$$

5. Dla każdego elementu $\vec{v}\in\mathbb{V}$ istnieje element przeciwny $\vec{-v}$:
$$\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}\exists_{\vec{-v}\in\mathbb{V}}(\vec{-v})+\vec{v}=\vec{0}$$

6. Zdefiniowane jest mnożenie (lewostronne) elementów $\mathbb{V}$ przez elementy z $\mathbb{F}$:
$$\cdot:\mathbb{F}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$$

7. Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania (skalarów):
$$\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{F}}\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}(\alpha+\beta)\cdot\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$$

8. Zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania (wektorów):
$$\forall_{\alpha\in\mathbb{F}}\forall_{\vec{v},\vec{u}\in\mathbb{V}}\alpha\cdot(\vec{v}+\vec{u})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{u}$$

9. Mnożenie jest łączne:
$$\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{F}}\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v})=(\alpha\beta)\cdot\vec{v}$$

10. Mnożenie przez „jedynkę” z ciała zachowuje wektor:
$$\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}1\cdot\vec{v}=\vec{v}$$

Elementy $\mathbb{V}$ nazywamy *wektorami*, zaś elementy $\mathbb{F}$: *skalarami*.

Uwaga. Mnożymy tylko przez skalary, wektory możemy tylko dodawać.

Przykład 1.3. 1. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\{0\}$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{Z}_p^n$, każde nad odpowiednim ciałem: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, dowolnym, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_p$.

2. Zbiory funkcji: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Zbiory funkcji o skończenie wielu (przeliczalnie wielu) wartościach niezerowych.

   Ale nie: zbiory funkcji, które dla nieskończenie wielu argumentów przyjmują 1.

3. $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{Q}$.

4. Zbiory ciągów nieskończonych o wartościach w $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, ... (czyli zbiory funkcji $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$, ...)

5. Zbiory ciągów skończonych o wartościach w $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, ...

6. Zbiory wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$ nad $\mathbb{F}$. Zbiory wielomianów określonego stopnia. Zbiory wielomianów zerujących się w jakichś punktach.

7. Punkty w $\mathbb{R}^2$ spełniające równanie $2x+y=0$. Punkty w $\mathbb{R}^3$ spełniające równanie $2x+y=0, x-y+3z=0$. Ale nie $2x+y=1, x-y+3z=0$.

Też mają dużo oczekiwanych własności.

Fakt 1.4. *1.* $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}0\cdot\vec{v}=\vec{0}$

2. $\forall_{\alpha\in\mathbb{F}}\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$

3. $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V},\alpha\in\mathbb{F}}\alpha\cdot\vec{v}=\vec{0}\iff\vec{v}=\vec{0}\vee\alpha=0$

4. $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}(-1)\vec{v}=\vec{-v}$

5. wektor przeciwny jest dokładnie jeden

6. wektor zerowy jest dokładnie jeden

7. ...

1.3 Podprzestrzenie liniowe

Definicja 1.5 (Podprzestrzeń liniowa)**.** Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jej podzbiór $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ jest *podprzestrzenią liniową*, gdy jest przestrzenią liniową nad tym samym ciałem i działania są określone tak, jak w $\mathbb{V}$. Zapisujemy to jako $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$.

Taki zbiór musi być niepusty (ale może zawierać tylko $\vec{0}$).

Przykład 1.6.

1. cała przestrzeń $\mathbb{V}$ jest swoją podprzestrzenią;
2. $\{\vec{0}\}$ jest podprzestrzenią;
3. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów mających 0 na ustalonych współrzędnych;
4. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów o sumie współrzędnych równej 0;
5. dla zbioru wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$, zbiór wielomianów o stopniu najwyżej k;
6. dla zbioru wszystkich wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$, zbiór wielomianów przyjmujących wartość 0 w ustalonym zbiorze punktów;
7. w $\mathbb{R}^n$ zbiór wektorów spełniających równania $x_1 + 2x_2 = 0$ i $x_3 - x_2 = 0$.

Lemat 1.7. *Niepusty podzbiór przestrzeni liniowej jest podprzestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez skalary.*

Dowód. $\Rightarrow$ Podprzestrzeń liniowa jest niepusta, zamknięta na dodawanie i mnożenie przez skalary.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{V}$ jest zamknięta na dodawanie i mnożenie przez skalary. Chcemy pokazać, że jest przestrzenią liniową; w oczywisty sposób zawiera się w $\mathbb{V}$.

Dodawanie i mnożenie w U określamy tak jak w $\mathbb{V}$. Ze względu na zamkniętość na dodawanie i mnożenie, jest to dobra definicja.

Dla każdego elementu istnieje przeciwny: wystarczy pomnożyć przez -1.

Wektor zerowy jest w U: otrzymujemy go jako sumę $\vec{v} + \vec{-v}$ (tu korzystamy z tego, że U jest niepusty: jest w nim jakiś wektor $\vec{v}$); alternatywnie jako $0 \cdot \vec{v}$ dla dowolnego $\vec{v}$, ponownie korzystamy z niepustości.

Wszystkie pozostałe własności (łączność, przemienność) itp. są równościami pomiędzy pewnymi elementami U (to są elementy U, bo jest ono zamknięte na mnożenie i dodawanie). Ale te równości zachodzą w $\mathbb{V}$, a działania w U są takie same, jak w $\mathbb{V}$, czyli zachodzą też w U. □

Podprzestrzenie liniowe można generować używając pewnych standardowych operacji: przecięcia, sumy, iloczynu kartezjańskiego.

Definicja 1.8 (Suma, przecięcie, iloczyn kartezjański przestrzeni liniowych)**.** Niech $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Wtedy ich *suma* to

$$\mathbb{W} + \mathbb{W}' = \{\vec{w} + \vec{w'} \,:\, \vec{w} \in \mathbb{W},\, \vec{w'} \in \mathbb{W}'\}.$$

Dla dowolnego zbioru podprzestrzeni liniowych $\{\mathbb{W}_i\}_{i \in I}$, gdzie $\mathbb{W}_i \leq \mathbb{V}$ dla każdego $i \in I$, przecięcie zdefiniowane jest naturalnie jako $\bigcap_{i \in I} \mathbb{W}_i$ (jako zbiór).

Dla dowolnego zbioru przestrzeni liniowych $\{\mathbb{V}_i\}_{i \in I}$ nad tym samym ciałem produkt kartezjański $\prod_{i \in I} \mathbb{V}_i$ zdefiniowany jest naturalnie. Działania zdefiniowane są po współrzędnych.

Lemat 1.9. *Suma, przecięcie oraz iloczyn kartezjański przestrzeni liniowych jest przestrzenią liniową.*

Suma przestrzeni liniowych $\mathbb{W} + \mathbb{W}'$ jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierająca jednocześnie $\mathbb{W}$ i $\mathbb{W}'$.

Przekrój przestrzeni liniowych $\bigcap_i \mathbb{W}_i$ jest największą przestrzenią liniową zawartą jednocześnie we wszystkich podprzestrzeniach $\mathbb{W}_i$.

Dowód pozostawiony jest jako ćwiczenie.

1.4 Kombinacje liniowe wektorów

W przestrzeniach liniowych możemy w zwarty sposób reprezentować zbiory poprzez sumy.

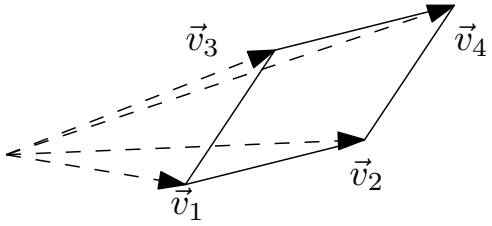
Definicja 1.10 (Kombinacja liniowa)**.** Dla wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ ich *kombinacja liniowa* to dowolny wektor postaci

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i \ ,$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest ciągiem skalarów z ciała $\mathbb{F}$.

Kombinacja liniowa jest *z definicji* skończona.

Przykład 1.11.
- W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ prosta przechodząca przez $(0,0)$ i $(1,1)$ to kombinacja wektora $[1,1]$.
- Prosta przechodzące przez punkty $(1,1)$ i $(2,3)$ to kombinacja postaci $\alpha[1,1] + (1-\alpha)[2,3] = [1,1] + (1-\alpha)\cdot[1,2]$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Odcinek między $(1,1)$ a $(2,3)$ to ograniczona kombinacja postaci $\alpha[1,1] + (1-\alpha)[2,3]$ dla $\alpha \in [0,1]$.
- Równoległobok o wierzchołkach w punktach $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$, spełniających warunki $\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ to zbiór punktów spełniających $\vec{v}_1 + \alpha(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) + \beta(\vec{v}_3 - \vec{v}_1)$ dla $\alpha, \beta \in [0,1]$. Obwód tego równoległoboku spełnia dodatkowo warunek, że przynajmniej jedna z liczb α, β należy do zbioru $\{0,1\}$.



Definicja 1.12. Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$. Dla dowolnego zbioru wektorów (skończonego lub nie) $U \subseteq \mathbb{V}$ jego *otoczka liniowa*, oznaczana jako $\mathrm{LIN}(U)$, to zbiór kombinacji liniowych wektorów ze zbioru U:

$$\mathrm{LIN}(U) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i \mid k \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F},\ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in U \right\}. \tag{1.1}$$

$\mathrm{LIN}(U)$ nazywane jest też *podprzestrzenią rozpiętą* przez U lub *domknięciem liniowym* U.

Przykład 1.13. Dla zbioru wszystkich ciągów nieskończonych o wartościach z $\mathbb{R}$, niech $\vec{e}_i$ to ciąg mający na i-tym miejscu 1 i mający 0 na pozostałych pozycjach. Wtedy $\mathrm{LIN}(\{\vec{e}_i\}_{i\in\mathbb{N}})$ to zbiór ciągów o skończenie wielu niezerowych współrzędnych.

Uwaga. Dla prostoty zapisu, nie zakładamy, że wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ są różne, ale jeśli to wygodne, to bez zmniejszenia ogólności możemy to założyć. Dla układu wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ będziemy czasami pisać $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ na oznaczenie $\mathrm{LIN}(\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\})$.

Fakt 1.14. *Dla dowolnego zbioru wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ w przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ otoczka liniowa $\mathrm{LIN}(U)$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{V}$. Jest to najmniejsza przestrzeń liniowa zawierającą U.*

Dowód. Niech $U \subseteq \mathbb{W}$, to skoro $\mathbb{W}$ jest zamknięta na kombinacje liniowe, to również $\mathrm{LIN}(U) \subseteq \mathbb{W}$.

Sprawdźmy, że $\mathrm{LIN}(U)$ jest przestrzenią liniową: pokażemy, że jest zamknięta na dodawanie i mnożenie. Jeśli $\vec{v}, \vec{v}' \in \mathrm{LIN}(U)$ to $\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$ i $\vec{v}' = \sum_{i=k+1}^{\ell} \alpha_i \vec{v}_i$ i tym samym $\vec{v} + \vec{v}' = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \vec{v}_i$ oraz $\alpha\vec{v} = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i)\vec{v}_i$

W takim razie $\mathrm{LIN}(U)$ jest zawarte w każdej przestrzeni zawierającej U, czyli też w ich przecięciu, które też jest przestrzenią liniową. □

Fakt 1.15. *Jeśli $U \subseteq U' \subseteq \mathbb{V}$, gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową, to* $\mathrm{LIN}(U) \leq \mathrm{LIN}(U')$.

Dowód. Skoro $U \subseteq U'$ to każda kombinacja z U jest też kombinacją z U', czyli $\mathrm{LIN}(U) \subseteq \mathrm{LIN}(U')$, ale skoro obie są podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{V}$, to dostajemy tezę. □

Lemat 1.16. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $U, U' \subseteq \mathbb{V}$ układem wektorów. Wtedy:*

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U)) \ .$$

Jeśli $U \subseteq \mathrm{LIN}(U')$ i $U' \subseteq \mathrm{LIN}(U)$ to

$$\mathrm{LIN}(U') = \mathrm{LIN}(U) \ .$$

Dowód. Zauważmy, że z Faktu 1.14 wiemy, że $\mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U))$ jest najmniejszą przestrzenią liniową zawierającą $\mathrm{LIN}(U)$. Ale $\mathrm{LIN}(U)$ jest przestrzenią liniową, czyli $\mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U)) = \mathrm{LIN}(U)$.

Co do drugiego punktu, z Faktu 1.15 mamy:

$$U \subseteq \mathrm{LIN}(U') \implies \mathrm{LIN}(U) \leq \mathrm{LIN}(\mathrm{LIN}(U')) = \mathrm{LIN}(U')$$

i analogicznie $\mathrm{LIN}(U') \leq \mathrm{LIN}(U)$, co daje tezę. □

Otoczka liniowa jest niezmiennicza na kombinacje liniowe.

Lemat 1.17. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, zaś $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{V}$ wektorami z $\mathbb{V}$. Jeśli skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ są niezerowe to*

$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\alpha_1\vec{v}_1, \ldots, \alpha_k\vec{v}_k) \ .$$

Dla $i \neq j$ oraz skalara $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k) \ .$$

Dowód. Dowód przy użyciu Lematu 1.16: niech $U_1 = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$, $U_2 = (\alpha_1\vec{v}_1, \ldots, \alpha_k\vec{v}_k)$. Wtedy $U_1 \subseteq \mathrm{LIN}(U_2)$ oraz $U_2 \subseteq \mathrm{LIN}(U_1)$ i w takim razie $\mathrm{LIN}(U_1) = \mathrm{LIN}(U_2)$

Niech teraz $U_4 = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k)$. Analogicznie, $U_1 \subseteq \mathrm{LIN}(U_4)$ oraz $U_4 \subseteq \mathrm{LIN}(U_1)$ co daje $\mathrm{LIN}(U_1) = \mathrm{LIN}(U_4)$. □

Lemat 1.18. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{V}$ zbiorem wektorów z $\mathbb{V}$, zaś $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ ciągiem skalarów, gdzie $\alpha_1 \neq 0$. Wtedy*

$$\mathrm{LIN}\left(\left\{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\vec{v}_i, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\right\}\right) = \mathrm{LIN}\left(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\}\right). \tag{1.2}$$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

1.5 Liniowa niezależność wektorów.

Definicja 1.19. Układ wektorów U jest *liniowo niezależny* gdy dla dowolnego $k \geq 1$, dowolnych różnych $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in U$ oraz ciągu współczynników $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$$

implikuje

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \ .$$

Uwaga. U traktujemy jako multizbiór: jeśli zawiera jakiś element m razy, to można go m razy użyć. W takim przypadku U jest liniowo zależny, bo $\vec{v} + (-1) \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Lemat 1.20. *Niech $B \subseteq \mathbb{V}$ będzie układem wektorów. Następujące warunki są równoważne:*

1. *Układ B jest liniowo niezależny.*
2. *Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.*
3. *Pewien wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B.*

4. Każdy wektor z $\mathrm{LIN}(B)$ *ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów z* B*.*

D-d pozostawiamy jako ćwiczenie.

Fakt 1.21. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów* $U \subseteq \mathbb{V}$ *jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy gdy jeden z nich można przedstawić jako liniową kombinację pozostałych.*

Równoważne sformułowanie: Układ wektorów $U \subseteq \mathbb{V}$ *jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $\vec{u} \in U$ *taki że* $\vec{u} \in \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\})$*.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli układ jest liniowo zależny, to istnieje niezerowa kombinacja $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i = 0$. Bez zmniejszenia ogólności, niech $\alpha_1 \neq 0$. Wtedy $\vec{v}_1 = \sum_{i>1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\vec{v}_i$ i jest to żądane przedstawienie.

$\Leftarrow$ Jeśli $\vec{u}_1 = \sum_{i>1} \alpha_i \vec{u}_i$ to $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$ dla $\alpha_1 = -1$. □

Fakt 1.22. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie przestrzenią liniową. Układ wektorów* $U \subseteq \mathbb{V}$ *jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $\vec{u} \in U$ *taki że*

$$\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{u}\}).$$

Jeśli U *nie zawiera* $\vec{0}$*, to są przynajmniej dwa takie wektory.*

(Uwaga: traktujemy U *jako multizbiór, tzn. jeśli zawiera dwa razy ten sam wektor, to wyborem* $\vec{u}$ *mogą być dwie różne „kopie" tego samego wektora.)*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Uogólnijmy Lemat 1.18.

Lemat 1.23 (Porównaj Lemat 1.18)**.** *Niech* $U = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ *będzie układem wektorów, rozpatrzmy układy*

$$U' = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \alpha\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k) \qquad \text{dla } \alpha \neq 0, 1 \leq i \leq k$$
$$U'' = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k) \qquad \text{dla } i \neq j.$$

Wtedy U *jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy gdy* U' *jest liniowo zależny, wtedy i tylko wtedy gdy* U'' *jest liniowo zależny.*

Dowód. Skorzystamy z Faktu 1.21: załóżmy, że U jest liniowo zależne, niech $\vec{v}_k \in \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{v}_k\})$. Jeśli $k \neq i$ to zauważmy, że $\mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{v}_k\}) = \mathrm{LIN}(U' \setminus \{\vec{v}_k\})$ (z Lematu 1.17) i w takim razie U' jest liniowo zależny. Jeśli $k = i$, to skoro $\vec{v}_i \in \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{v}_i\}) = \mathrm{LIN}(U' \setminus \{\alpha\vec{v}_i\})$ to oczywiście również $\alpha\vec{v}_i \in \mathrm{LIN}(U' \setminus \{\alpha\vec{v}_i\})$.

Dowód dla U'' jest podobny. Zauważmy najpierw, że jeśli $\vec{0} \in U$ to U'' też jest liniowo zależny: jeśli $\vec{v}_i = 0$ to w U'' mamy $\alpha\vec{v}_j$ oraz $\vec{v}_j$ (czyli U'' jest liniowo zależny), jeśli $\vec{v}_j = \vec{0}$ dla $j \neq i$ to $\vec{0} \in U''$ i również jest on liniowo zależny.

Skoro U jest liniowo zależny, to z Faktu 1.22 istnieje k takie że $\mathrm{LIN}(U) = \mathrm{LIN}(U \setminus \{\vec{v}_k\})$, co więcej, skoro $\vec{0} \notin U$ to możemy założyć, że $k \neq j$. Teraz, jeśli $k \neq i$ to argument jest taki sam jak dla U' (zauważmy, że z założenia $k \neq j$). Jeśli $k = i$ to korzystamy z tego, że $\vec{v}_i \in \mathrm{LIN}(U'' \setminus \{\vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j\})$ oraz $\vec{v}_j \in \mathrm{LIN}(U'' \setminus \{\vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j\})$ i w takim razie $\vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j \in \mathrm{LIN}(U'' \setminus \{\vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j\})$ i U'' jest liniowo zależny.

$\Leftarrow$ Implikacje w drugą stroną wynikają z symetrii: w pierwszym przypadku U uzyskujemy z U' przez przemnożenie $\alpha\vec{v}_i$ przez α^{-1}, w drugim U z U'' przez dodanie do $\vec{v}_i + \alpha\vec{v}_j$ wektora $(-\alpha)\vec{v}_j$. □

1.6 Metoda eliminacja Gauβa.

Chcemy mieć usystematyzowany sposób znajdowania dla (skończonego) zbioru wektorów $U \subseteq \mathbb{F}^n$ jego maksymalnego (względem zawierania) podzbioru niezależnego.

Chcemy uogólnić następujące obserwacje:

- jeśli każdy wektor ma współrzędną, na której tylko on jest niezerowy, to zbiór jest liniowo niezależny;
- układ wektorów zawierający $\vec{0}$ nie jest niezależny;
- używając Lematu 1.23 możemy „upraszczać wektory".

Przykład 1.24.

$$\begin{bmatrix}1&6&5&5&3\\1&2&3&2&2\\3&4&5&3&3\\2&1&3&1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)-(4)} \begin{bmatrix}1&6&5&5&3\\1&2&3&2&2\\0&1&-1&0&-1\\2&1&3&1&2\end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2),(4)-2\cdot(2)} \begin{bmatrix}0&4&2&3&1\\1&2&3&2&2\\0&1&-1&0&-1\\0&-3&-3&-3&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(3)+(4)} \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&2&3&2&2\\0&1&-1&0&-1\\0&-3&-3&-3&-2\end{bmatrix} \xrightarrow{(4)+3\cdot(3)} \begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&2&3&2&2\\0&1&-1&0&-1\\0&0&-6&-3&-5\end{bmatrix}$$

Czyli wejściowy układ wektorów był liniowo zależny. Jednocześnie układ wektorów bez pierwszego danego jest liniowo niezależny, co pokazujemy przy użyciu analogicznych rachunków.

Sformalizujmy postać wektorów, do której w ten sposób dojdziemy.

Definicja 1.25 (Postać schodkowa)**.** Układ wektorów $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_m \in \mathbb{F}^n$ jest w *postaci schodkowej*, jeśli istnieje ciąg pozycji $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ takich że dla każdego $j = 1, \ldots, m$:

- wektor $\vec{V}_j$ ma na pozycji i_j element niezerowy
- wektor $\vec{V}_j$ ma na pozycjach $< i_j$ same 0.

Lemat 1.26. *Jeśli układ wektorów w $\mathbb{F}^n$ jest w postaci schodkowej, to jest niezależny.*

Dowód. Niech te wektory to $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ a ich pozycje z definicji postaci schodkowej to $i_1, \ldots, i_k$. Rozważmy współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ takie że $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{V}_j = \vec{0}$.

Niech α_j to najmniejszy niezerowy współczynnik w tej kombinacji liniowej. Wtedy liczba otrzymana na pozycji i_j jest niezerowa: wektory $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{j-1}$ są brane ze współczynnikami 0, wektory $\vec{V}_{j+1}, \ldots, \vec{V}_k$ mają na pozycji i_j same 0, czyli współczynnik na pozycji i_j w sumie $\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell \vec{V}_\ell$ to α_j razy wartość w $(\vec{V}_j)_{i_j} \neq 0$. Sprzeczność. □

W ogólności chcemy przekształcić dowolny układ wektorów używając operacji jak w Lemacie 1.23 do zbioru wektorów w postaci schodkowej i wektorów $\vec{0}$. Jeśli tych drugich nie ma, to wejściowy zbiór był niezależny, jeśli są, to był zależny.

Pokażemy teraz, że używając takich operacji zawsze można sprowadzić układ do postaci schodkowej.

W każdym kroku metody utrzymujemy dwa zbiory wektorów: U oraz U' oraz pozycję j. Początkowo U jest całym zbiorem wektorów, U' jest pusty, zaś $j = 0$. Jako niezmiennik utrzymujemy następujące własności:

- U' jest w postaci schodkowej oraz indeksy odpowiednich niezerowych pozycji są nie większe niż j
- wektory w U mają na pozycjach nie większych niż j same 0.

W każdym kroku wybieramy pozycję j' oraz wektor $\vec{V} \in U$ takie że:

- $j' > j$ i j' jest najmniejsze, takie że któryś z wektorów z U ma niezerową współrzędną j'
- $\vec{V} \in U$ oraz ma niezerową współrzędną j'

Dodajemy $\vec{V}$ do U', wybieramy j' jako nowe j.

Niech $(\vec{V})_{j'} = \alpha$. Dla każdego $\vec{V}' \in U \setminus \{\vec{V}\}$: niech $(\vec{V}')_{j'} = \alpha'$. Zastępujemy $\vec{V}'$ przez $\vec{V}' - \frac{\alpha'}{\alpha}\vec{V}$ (zerujemy odpowiednią współrzędną).

Łatwo pokazać, że po tym wyborze niezmienniki są zachowane.

Lemat 1.27. *Po zakończeniu otrzymujemy układ złożony z wektorów liniowo niezależnych oraz samych wektorów zerowych. Wektory niezależne rozpinają oryginalną przestrzeń.*

Dowód. Skoro nie możemy kontynuować, to albo

- U jest pusty. Wtedy U' jest w postaci schodkowej, czyli z Lematu 1.26 jest liniowo niezależny, ma tyle samo wektorów, co zbiór wejściowy i z Lematu 1.23 wejściowy układ był liniowo niezależny.

- U jest niepusty, ale nie da się wybrać j'. Czyli wszystkie wektory w U mają zerowe współrzędne dla $j' > j$. Z założenia mają też zerowe współrzędne dla $j' \leq j$, czyli U zawiera same wektory $\vec{0}$. Czyli $U' \cup U$ jest liniowo zależny i z Lematu 1.23 również układ wejściowy jest liniowo zależny.

  Wykonywane operacje nie zmieniają rozpinanej przestrzeni.

□.

Fakt 1.28. *Oryginalny zbiór był niezależny wtedy i tylko wtedy gdy nie otrzymaliśmy żadnego wektora* $\vec{0}$.

Jeśli w czasie eliminacji Gauβa używaliśmy do eliminowania jedynie wektorów $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$*, które na końcu są niezerowe, to odpowiadające im wektory początkowe rozpinają tę samą przestrzeń, co wszystkie wektory początkowe.*

Dowód. Z Lematu 1.23, Eliminacja Gauβa zachowuje niezależność zbioru wektorów, więc jeśli na końcu nie ma wektora $\vec{0}$, to wszystkie początkowe wektory były niezależne.

Zauważmy, że są niezależne, bo gdy przeprowadzimy na nich eliminację Gauβa to uzyskamy te same wektory, co poprzednio, czyli niezerowe. □

Rozdział 2

Baza przestrzeni liniowej, wymiar

2.1 Baza przestrzeni liniowej

Chcemy minimalny (niezależny) układ wektorów generujący daną przestrzeń: bo po co więcej (i ma wiele innych, dobrych własności).

Definicja 2.1 (Baza). B jest *bazą* przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ gdy $\mathrm{LIN}(B) = \mathbb{V}$ oraz B jest liniowo niezależny.

Alternatywnie, mówimy, że B jest *minimalnym zbiorem rozpinającym* $\mathbb{V}$.

Przykład 2.2.
- W przestrzeni $\mathbb{F}^n$ wektory (tzw. *baza standardowa*): $\vec{E}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{E}_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{E}_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, 0)$, $\vec{E}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.
- W przestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$: wielomiany $\{x^i\}_{i=0}^n$.
- W przestrzeni ciągów o wyrazach w $\mathbb{F}$, które mają skończenie wiele niezerowych wyrazów: $\{\vec{e}_i\}$, gdzie $\vec{e}_i$ ma 1 na i-tej pozycji i 0 wszędzie indziej. Ta baza jest nieskończona.

Interesują nas głównie przestrzenie, które mają skończoną bazę. Większość tego, co powiemy, jest też prawdą dla przeliczalnych baz (przez indukcję), część jest też prawdziwa ogólnie, ale dowody są dużo bardziej techniczne.

Twierdzenie 2.3. *Eliminacja Gaußa zastosowana do układu wektorów U zwraca bazę* $\mathrm{LIN}(U)$ *(oraz wektory zerowe).*

Wektory z wejścia odpowiadające uzyskanej bazie też są bazą.

Dowód. Z Lematu 1.27 po zakończeniu mamy zbiór wektorów liniowo niezależnych oraz zbiór wektorów zerowych. Czyli niezerowe wektory są bazą rozpinanej przez siebie przestrzeni.

Jednocześnie wiemy, że nie zmienia się rozpinana przez cały układ przestrzeń, czyli są bazą przestrzeni rozpinanej przez wejściowy układ wektorów. □

Uwaga. Przypuśćmy, że w eliminacji Gaußa dostaliśmy wektory odpowiadające wektorom $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ z wejścia. Wtedy przeprowadzenie eliminacji na samych tych wektorach da ten sam wynik, co przeprowadzenie ich na wszystkich. W szczególności, wektory $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ z wejścia są niezależne i rozpinaja tę samą przestrzeń, co wszystkie; czyli są bazą.

Jeśli dodajemy wektory w inny sposób, to ważne jest, czy do wektorów $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ dodaliśmy też któryś z pozostałych. Jeśli nie, to wniosek jest dalej taki sam. Jeśli coś dodaliśmy, to być może wektory $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ nie są niezależne. Przykładowo:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(2)+(4)-(1)-(3)} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{(4)-(2)} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Ale trzy pierwsze wektory nie były liniowo niezależne (były za to wektory $1, 2, 4$).

Definicja 2.4 (Przestrzeń skończenie wymiarowa). Przestrzeń jest *skończenie wymiarowa*, jeśli ma skończony zbiór rozpinający.

2.2 Wyrażanie wektora w bazie

Definicja 2.5 (Wyrażanie wektora w bazie)**.** Jeśli $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ oraz $\vec{v} \in \mathbb{V}$ jest wektorem, to *wyrażeniem wektora* $\vec{v}$ w bazie B nazywamy reprezentację $\vec{v}$ jako

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \ .$$

Przykład 2.6. Rozważmy bazę $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$; niech $\vec{E_1}, \vec{E_2}, \vec{E_3}$ będą wektorami bazy standardowej. Wtedy $\vec{E_1} = (1,1,1) - (0,1,1)$, $\vec{E_2} = (0,1,1) - (0,0,1)$ i $\vec{E_3} = (0,0,1)$.

Twierdzenie 2.7. *Każdy wektor ma jednoznaczne przedstawienie w bazie*

Dowód. Jeśli $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i$ oraz $\sum_{i=1}^{k} \beta_i \vec{v}_i$ to dwa różne przedstawienia, to $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i)\vec{v}_i = \vec{0}$ jest nietrywialną kombinacją dla wektora $\vec{0}$, co przeczy założeniu, że $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ jest bazą. □

Skoro każdy wektor można naturalnie wyrazić w bazie, to możemy uogólnić notację wektorową dla $\mathbb{F}^n$ na dowolne przestrzenie i bazy

Definicja 2.8 (Notacja: Wyrażanie wektora w bazie)**.** Jeśli $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ oraz $\vec{v} \in \mathbb{V}$ jest wektorem, to

$$(\vec{v})_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

gdzie $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$. Liczby α_i to *współrzędne* wektora $\vec{v}$ w bazie B.

Przykład 2.9. Kontynuując poprzedni przykład: dla bazy $B = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ mamy $(\vec{E_1})_B = (1,-1,0)$, $(\vec{E_2})_B = (0,1,-1)$ i $(\vec{E_3})_B = (0,0,1)$. Używając tej reprezentacji łatwo pokazać, np. że dla $\vec{V} = (7,4,2)$ mamy $(\vec{V})_B = (7,-3,-2)$, bo

$$(\vec{V})_B = (7\vec{E_1} + 4\vec{E_2} + 2\vec{E_3})_B = 7(\vec{E_1})_B + 4(\vec{E_2})_B + 2(\vec{E_3})_B.$$

Zauważmy, że po wyrażeniu wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ w ustalonej bazie B możemy traktować je podobnie jak wektory z $\mathbb{F}^n$. W pewnym sensie to jest „dokładne" odwzorowanie.

Definicja 2.10 (Izomorfizm przestrzeni liniowych)**.** Mówimy, że dwie przestrzenie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ są *izomorficzne*, jeśli istnieją bijekcje $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$, takie że $\varphi(\vec{v} +_{\mathbb{V}} \vec{v'}) = \varphi(\vec{v}) +_{\mathbb{W}} \varphi(\vec{v'})$ oraz $\varphi(\alpha \cdot_{\mathbb{V}} \vec{v}) = \alpha \cdot_{\mathbb{W}} \varphi(\vec{v})$ i analogicznie dla ψ.

Przykład 2.11.

- Przestrzeń wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{F}$) stopnia nie większego niż k oraz $\mathbb{F}^{k+1}$
- Przestrzeń wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{F}$) oraz przestrzeń $\{f \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : |\{i \in \mathbb{N} : f(i) \neq 0\}|$ jest skończone$\}$ ciągów o wartościach w $\mathbb{F}$, takich że jedynie skończona liczba elementów ciągu jest niezerowa

Lemat 2.12. *Dla ustalonej przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{V}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ i jej skończonej bazy B, wyrażenie wektora w bazie B jest izomorfizmem $\mathbb{V}$ i $\mathbb{F}^{|B|}$.*

Dowód. Niech $n = |B|$ i niech $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ będą kolejnymi wektorami z bazy.

Sprawdźmy najpierw, że $(\cdot)_B$ jest bijekcją. $(\cdot)_B$ jest różnowartościowe: gdyby dwa wektory $\vec{u}, \vec{v}$ były przekształcone na ten sam element $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ to wtedy

$$\vec{u} = \sum_i \alpha_i \vec{v}_i = \vec{v} \ ,$$

co przeczy założeniu, że $\vec{u} \neq \vec{v}$.

Jest też na: dla ustalonego $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ rozpatrzmy wektor $\vec{v} = \sum_i \alpha_i \vec{v}_i$. Wtedy oczywiście $(\vec{v})_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. (Zauważmy, że ten argument nie działa w przypadku nieskończonej bazy.)

Czyli istnieje też przekształcenie odwrotne do $(\cdot)_B$.

Łatwo sprawdzić, że $(\cdot)_B$ zachowuje działania. Jeśli $\vec{v} = \sum_i \alpha_i \vec{v}_i$ to $\alpha\vec{v} = \alpha \sum_i \alpha_i \vec{v}_i = \sum_i (\alpha\alpha_i)\vec{v}_i$ i ponieważ wyrażenie w bazie jest jednoznaczne, dostajemy, że

$$(\alpha\vec{v})_B = \alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \alpha(\vec{v})_B$$

Analogicznie pokazujemy dla sumy wektorów $\vec{u} + \vec{v}$.

W drugą stronę również pokazujemy analogicznie. □

Uwaga. To *nie jest prawda* w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych! Rozważmy przestrzeń liniową wszystkich nieskończonych ciągów o elementach z $\mathbb{Z}_2$ (nad $\mathbb{Z}_2$), które mają tylko skończenie wiele niezerowych współrzędnych. Zauważmy, że ten zbiór jest przeliczalny

Bazą tej przestrzeni są np. ciągi $\{\vec{e}_i\}_{i\geq 0}$, gdzie $\vec{e}_i$ ma 1 na i-tej współrzędnej oraz 0 wszędzie indziej. Z drugiej strony, ta przestrzeń *nie jest izomorficzna* z przestrzenią $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$: te dwie przestrzenie są różnej mocy!

Fakt 2.13. *Niech $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie izomorfizmem. Wtedy układ $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_n)\}$ jest liniowo niezależny.*

Twierdzenie 2.14. *Niech $\mathbb{V}$ nad $\mathbb{F}$ ma bazę n-elementową. Wtedy $\mathbb{V}$ jest izomorficzna z $\mathbb{F}^n$.*

Dowolne dwie przestrzenie liniowe nad $\mathbb{F}$ mające bazy n-elementowe są izomorficzne.

Dowód. Weźmy dowolną bazę $\mathbb{V}$. Wtedy wyrażenie $(\vec{v})_B$ wektora $\vec{v}$ w bazie B jest takim izomorfizmem.

Co do drugiego punktu, to obie są izomorficzne z $\mathbb{F}^n$ i łatwo sprawdzić, że relacja bycia izomorficznymi przestrzeniami liniowymi jest relacją równoważności. □

Uwaga. Mając dowolny układ wektorów możemy wyrazić je w (dowolnej) bazie i zastosować na nich eliminację Gauβa.

Naszym celem jest pokazanie, że rozmiar bazy nie zależy od wyboru bazy, lecz jest własnością przestrzeni liniowej.

Twierdzenie 2.15. *Każda przestrzeń (skończenie wymiarowa) $\mathbb{V}$ ma bazę.*

Każda baza przestrzeni (skończenie wymiarowej) $\mathbb{V}$ ma taką samą moc.

Dowód dla zainteresowanych, nie przedstawiany na wykładzie, nie wymagany. W skrócie polega on na rozważeniu dwóch baz różnej mocy i iteracyjnym przekształceniu jednej w drugą przy użyciu Lematu Steinitza.

Lemat 2.16 (Lemat Steinitza o wymianie)**.** *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową, $A \subseteq \mathbb{V}$ liniowo niezależnym układem wektorów, zaś B układem rozpinającym $\mathbb{V}$. Wtedy albo A jest bazą, albo istnieje $\vec{v} \in B$ taki że $A \cup \{\vec{v}\}$ jest liniowo niezależny.*

Dowód. Rozważmy, czy dla każdego $\vec{v} \in B$ mamy $\vec{v} \in \mathrm{LIN}(A)$.

Tak To $B \subseteq \mathrm{LIN}(A)$ i w takim razie z Lematu 1.16 mamy

$$\mathrm{LIN}(A) = \mathrm{LIN}(B \cup A) \geq \mathrm{LIN}(B) = \mathbb{V}.$$

Czyli A jest bazą.

Nie Istnieje $\vec{v} \in B$, taki że $\mathrm{LIN}(A \cup \{\vec{v}\}) \neq \mathrm{LIN}(A)$. Załóżmy nie wprost, że $A \cup \{\vec{v}\}$ jest liniowo zależny. Wtedy istnieje kombinacja liniowa

$$\sum_j \alpha_j \vec{u}_j + \alpha\vec{v} = 0$$

w której nie wszystkie współczynniki są zerowe, zaś $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \ldots \in A$. Jeśli $\alpha \neq 0$ to to pokazuje, że $\vec{v} \in \mathrm{LIN}(A)$, co nie jest prawdą. Jeśli $\alpha = 0$ to otrzymujemy, że A jest liniowo zależny, co z założenia nie jest prawdą, sprzeczność. □

dowód Twierdzenia 2.15. Punkt pierwszy wynika wprost z definicji przestrzeni skończenie wymiarowej i indukcji względem Lematu 2.16: rozpoczynamy ze zbiorem $B = \emptyset$ i dodajemy do niego kolejne wektory ze skończonego zbioru generującego $\mathbb{V}$, dbając, by był liniowo niezależny.

Niech $B_v = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ oraz $B_u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\ell\}$ będą dwoma bazami, gdzie $\ell \leq k$. Pokażemy, że $k = l$. W tym celu będziemy zastępować kolejne elementy B_u przez $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$.

Dokładniej, pokażemy przez indukcję po $j = 0, \ldots, \ell$, że istnieje podzbiór $\{\vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_j}\} \subseteq B_v$ taki że $\{\vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_j}\} \cup \{\vec{u}_{j+1}, \ldots, \vec{u}_\ell\}$ jest bazą. Dla $j = \ell$ daje to tezę. Zauważmy, że dla $j = 0$ teza indukcyjna trywialnie zachodzi.

Pokażemy krok indukcyjny. Weźmy $B_j = \{\vec{u}_{j+1}, \ldots, \vec{u}_\ell\} \cup \{\vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_j}\}$ i usuńmy z niego $\vec{u}_{j+1}$. Ten zbiór jest niezależny, nie jest bazą (bo wtedy B_j nie byłoby liniowe niezależne) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ jest bazą, z Lematu 2.16 istnieje $\vec{v}_{i_{j+1}}$ taki że $B_{j+1} = \{\vec{u}_{j+2}, \ldots, \vec{u}_\ell\} \cup \{\vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_{j+1}}\}$ jest liniowo niezależny.

Przypuśćmy, że B_{j+1} nie jest bazą. Wtedy z Lematu 2.16 można go rozszerzyć o wektor z B_j do zbioru niezależnego. Jedynym takim możliwym wektorem jest $\vec{u}_{j+1}$ (bo pozostałe są już w B_{j+1}). Ale wtedy mamy, że $B_j \cup \{\vec{v}_{j+1}\}$ jest niezależny, co nie jest możliwe, bo B_j było bazą. □

Wnioski z Lematu Steinitza:

Lemat 2.17. *Każdy zbiór niezależny skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej* $\mathbb{V}$ *można rozszerzyć do bazy.*

Lemat 2.18. *Jeśli* $\mathbb{V}$ *jest przestrzenią skończenie wymiarową, to z każdego układu wektorów* $A \subseteq \mathbb{V}$ *można wybrać bazę przestrzeni* $\mathrm{LIN}(A)$.

Przykład/Zastosowanie 2.19 (Eigenfaces). Zajmijmy się przez chwilę problemem rozpoznawania twarzy. Dla uproszczenia, są one odpowiednio wykadrowane oraz w odcieniach szarości.

Jak sprawdzić, czy obrazek przedstawia twarz? Czy przedstawia tę samą osobę?

Jednym z pierwszych skutecznych algorytmów (uczenia maszynowego) był *Eigenfaces* (znaczenie nazwy jeszcze sobie wyjaśnimy): traktujemy obrazy twarzy jako wektory w odpowiedniej przestrzeni (każdy piksel to jedna współrzędna). Następnie ustalamy odpowiednią bazę. Którą konkretnie? Bazę wektorów własnych — czym są i dlaczego akurat ją: dowiemy się później. Ta baza ma tę dodatkową własność, że wektory w niej sa uporządkowane względem ważności (ponownie, później dowiemy się jak i dlaczego).

Dla konkretnego zbioru zdjęć baza ta wygląda tak (50 pierwszych wektorów):

Okazuje się, że przy takiej reprezentacji określenie, czy dane zdjęcie jest twarzą, jest dużo prostsze. Ponadto zdjęcia jednej osoby są dużo bardziej skoncentrowane.

A dużo więcej szczegółów, implementacji, dyskusji itp. — na kursie Machine Learning.

Przykład/Zastosowanie 2.20 (Wielomiany). Przypatrzmy się wielomianom, dla prostoty: o współczynnikach z $\mathbb{R}$ oraz stopnia nie większego niż k (żeby baza była skończona). Gdy próbujemy obliczyć wartość wielomianu w punkcie, to dobrym sposobem reprezentacji wielomianu są jego współczynniki. Czyli reprezentacja w bazie jednomianów.

Jeśli chcemy mnożyć wielomiany, dużo lepszą reprezentacją jest podanie wartości w $k+1$ punktach, dla ustalenia uwagi: w $0, 1, \ldots, k$.

Zauważmy, że takie przedstawienie to reprezentacja w bazie, gdzie i-ty wektor to wielomian mający w punkcie i wartość 1 a w pozostałych 0.

Taka inna baza jest też bardzo przydatna przy *interpolacji* wielomianów: chcemy wyliczyć wielomian, którego wartości w ustalonych punktach znamy. Innymi słowy, znamy jego reprezentację w jednej bazie i chcemy reprezentować go w innej.

Przykład/Zastosowanie 2.21 (Transformata Fouriera). Ten przykład jest trochę oszukany przez nadmierne uproszczenia, ale daje pewne pojęcie.

Naszą abstrakcją dźwięku będzie

$$f = \sum_{\nu=20}^{20000} \alpha_\nu f_\nu + \beta_\nu g_\nu$$

Gdzie

$$f_\nu(t) = \sin(2\pi\nu t) \quad g_\nu(t) = \cos(2\pi\nu t)$$

są dźwiękami bazowymi (o częstotliwości ν).

Funkcja f zadana jest poprzez podanie wartości (w 44100 równo oddalonych punktach w przedziale $[0, 1]$).

(Dowolne 39960 z nich jest bazą tej przestrzeni.) Taka reprezentacja ma zalety: łatwo ją sprawdzić i łatwo z niej generować dźwięk.

Przekształcenie na bazę $\{f_\nu, g_\nu\}$ pozwala na dużo lepszą analizę, czy też np. wycinanie konkretnych częstotliwości, wzmacnianie/osłabianie itp.

Ponownie, zmiana tych baz jest dobrze zbadanym problemem (transformata Fouriera).

2.3 Wymiar przestrzeni liniowej

Definicja 2.22 (Wymiar przestrzeni liniowej)**.** Dla przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{V}$ jej *wymiar* to moc jej bazy. Oznaczamy go jako $\dim(\mathbb{V})$.

Intuicja: to jest „n" w $\mathbb{R}^n$ (lub ogólnie n w $\mathbb{F}^n$).

Uwaga. Dla przestrzeni $\mathbb{V} = \{\vec{0}\}$ przyjmujemy, że jej wymiar to 0. Może się wydawać, że jest to tylko konwencja oznaczeniowa, ale ma ona spore znaczenie praktyczne i jest spójna ze wszystkimi faktami: ta przestrzeń ma 0-elementową bazę.

Wniosek 2.23. Każde dwie przestrzenie liniowe n-wymiarowe nad $\mathbb{F}$ są izomorficzne i są izomorficzne z $\mathbb{F}^n$.

Lemat 2.24. *Jeśli $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ są przestrzeniami skończenie wymiarowymi, to*

$$\dim(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = \dim(\mathbb{V}_1) + \dim(\mathbb{V}_2) - \dim(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2).$$

Dowód. Jeśli któraś z tych przestrzeni ma wymiar 0, to równość zachodzi w oczywisty sposób.

Niech B będzie bazą $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ lub puste, jeśli $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\vec{0}\}$.

Rozszerzamy B do baz $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$, niech będą one $B \cup B_1$ oraz $B \cup B_2$.

Pokażemy, że $B \cup B_1 \cup B_2$ jest bazą $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Zauważmy, że generują one $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$: dla dowolnego $\vec{v} \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ mamy $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ dla pewnych $\vec{v}_1 \in \mathbb{V}_1$ oraz $\vec{v}_2 \in \mathbb{V}_2$. Wtedy $\vec{v}_1 \in \mathrm{LIN}(B \cup B_1)$ oraz $\vec{v}_2 \in \mathrm{LIN}(B \cup B_2)$, czyli $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathrm{LIN}(B \cup B_1 \cup B_2)$ i w takim razie $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \mathrm{LIN}(B \cup B_1 \cup B_2)$, bo jest ona zamknięta na sumę wektorów (to jest przestrzeń liniowa).

Pozostało pokazać, że jest to zbiór liniowo niezależny. Rozpatrzmy dowolną kombinację liniową wektorów z $B \cup B_1 \cup B_2$, niech $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, $B_1 = \vec{v}_{n+1}, \ldots, \vec{v}_{n'}$, $B_2 = \vec{v}_{n'+1}, \ldots, \vec{v}_{n''}$. Wtedy taka kombinacja jest postaci

$$\sum_{i=1}^{n''} \alpha_i \vec{v}_i \ .$$

Przenieśmy na drugą stronę wektory odpowiadające B_2:

$$\sum_{i=1}^{n'} \alpha_i \vec{v}_i = \sum_{i=n'+1}^{n''} (-\alpha_i) \vec{v}_i \ .$$

Wektor po lewej stronie należy do $\mathbb{V}_1$, ten po prawej do $\mathbb{V}_2$, czyli należą do $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. W takim razie mają jednoznaczne przedstawienie w bazie B, ono jest takie samo w bazach $B \cup B_1$ oraz $B \cup B_2$, tj. takie przedstawienie w bazie $B \cup B_1$ używa tylko wektorów z B, analogicznie dla $B \cup B_2$. Jednocześnie, wektor po prawej stronie nie używa wektorów z B, czyli jest wektorem $\vec{0}$, czyli ma wszystkie współczynniki równe 0. W takim razie ten po lewej również jest $\vec{0}$ i w takim razie ma wszystkie współczynniki równe 0. □

Wzór ten służy głównie do liczenia wymiaru $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$:

Fakt 2.25. *Jeśli B_1, B_2 są bazami dla $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2 \leq \mathbb{V}$ to*

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathrm{LIN}(B_1 \cup B_2)$$

W takim razie znamy $\dim(\mathbb{V}_1), \dim(\mathbb{V}_2)$ i umiemy policzyć moc bazy $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, czyli znamy wymiar $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Czyli umiemy policzyć wymiar $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. (Przykład w kolejnym rozdziale.)

2.4 Zastosowanie eliminacji Gaußa do liczenia wymiaru

Gdy mamy dany zbiór A (skończony), to aby policzyć $\dim(\mathrm{LIN}(A))$ możemy zastosować eliminację Gaußa: wiemy, że po zakończeniu otrzymujemy zbiór wektorów liniowo niezależnych oraz wektory zerowe i generowana przestrzeń jest taka sama. Czyli otrzymany zbiór wektorów liniowo niezależnych to baza a jej liczność to liczba wymiarów przestrzeni.

Fakt 2.26. *Jeśli po zakończeniu eliminacji Gaußa otrzymujemy zbiór złożony z k niezerowych wektorów (oraz pewnej liczby wektorów $\vec{0}$), to oryginalny zbiór zawierał dokładnie k wektorów liniowo niezależnych.*

Dowód. Komentarz: część z tych rzeczy już wiemy, ale można to prościej pokazać używając pojęcia wymiaru.

Wiemy już, że metoda eliminacji Gaußa zachowuje przestrzeń rozpiętą przez przechowywany przez nią układ wektorów. W szczególności wymiar (=moc bazy tej przestrzeni) nie zmienia się. Na końcu jest to liczba niezerowych wektorów, na początku: moc maksymalnego (względem zawierania) zbioru wektorów liniowo niezależnych. Jeśli na końcu było jakieś $\vec{0}$ to początkowy zbiór miał mniejszy wymiar, niż liczba jego wektorów, czyli był liniowo zależny. □

Przykład 2.27. Rozważmy przestrzenie liniowe S, T, zadane jako $S = \mathrm{LIN}(\{(1,6,5,5,3), (1,2,3,2,2)\})$ oraz $T = \mathrm{LIN}(\{(3,4,5,3,3), (2,1,3,1,2)\})$. Obliczymy $\dim(S+T)$ oraz $\dim(S \cap T)$ i podamy bazę $S+T$.

Łatwo zauważyć, że podany zbiór generatorów S ma dwa wektory niezależne (są różne, a mają taką samą pierwszą współrzędną), podobnie T ma wymiar 2. Będziemy korzystać z zależności:

$$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

Czyli wystarczy, że policzymy wymiar $S+T$. Suma (mnogościowa) generatorów S oraz T generuje $S+T$, zastosujemy metodę eliminacji Gaußa w celu obliczenia wymiaru; odpowiednie rachunki zostały już przeprowadzone w Przykładzie 1.24.

$$\begin{matrix} 1 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{(3)-(2)-(4)} \begin{matrix} 1 & 6 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{(1)-(2),(4)-2\cdot(2)} \begin{matrix} 0 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(3)+(4)} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & -2 \end{matrix} \xrightarrow{(4)+3\cdot(3)} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & -5 \end{matrix}$$

Wymiar $S+T$ wynosi więc 3. Tym samym wymiar $S \cap T$ wynosi 1.

Co do bazy $S+T$ zauważmy, że wektory uzyskane przez kombinacje liniowe generatorów $S+T$ (czyli naszych wektorów zapisanych w wierszach) dalej należą do $S+T$, tym samym trzy wektory

$$(1,2,3,2,2), (0,1,-1,0,-1), (0,0,-6,-3,-5)$$

są bazą tej przestrzeni.

W eliminacji używaliśmy jedynie wektorów $2, 3, 4$, tak więc odpowiednie wektory wejścia również są bazą, tj.:

$$(1, 2, 3, 2, 2), (3, 4, 5, 3, 3), (2, 1, 3, 1, 2)$$

są bazą $S + T$.

2.4.1 Wybór bazy

Wybór właściwej bazy ma często kluczowe znaczenie do zrozumienia problemu lub też znalezienia prostego rozwiązania. Pokażemy to na przykładach.

Przykład/Zastosowanie 2.28 (Rekurencje liniowe). Rekurencja na liczby Fibonacciego.

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_1 = f_2 = 1.$$

Jak rozwiązać takie równanie (podać postać zwartą). To może za proste, bo wszyscy znają.

Albo na coś podobnego.

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2a_{n-2} \\ a_0 &= \alpha, a_1 = \beta \end{aligned} \tag{2.1}$$

Jeśli zapomnimy o warunkach początkowych, to zbiór ciągów o wartościach w $\mathbb{R}$ oraz spełniających równanie (2.1) tworzy przestrzeń liniową. Nasz ciąg to konkretny wektor w tej przestrzeni liniowej. Widać, że baza jest dwuelementowa (ciąg mający $a_0 = 1, a_1 = 0$ oraz drugi $a_0 = 0, a_1 = 1$). Czyli wystarczy przedstawić nasz ciąg jako kombinację wektorów z bazy.

Nic nie daje: jak wygląda baza?

Szukamy innej, bardziej nam przydatnej bazy. Najlepiej by było, gdyby składała się z ciągów, których elementy możemy jawnie zadać wzorem albo prosto policzyć.

Ciągi arytmetyczne? Nie działa.

Geometryczne? Działa!

$$a^n = a^{n-1} + 2a^{n-2}$$

Czyli szukamy rozwiązań równania (podzielenie przez a^{n-2} jest dopuszczalne, bo $a = 0$ odpowiada trywialnemu przypadkowi wektora $\vec{0}$.)

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Jeden to $x = 2$, drugi to $x = -1$. Czyli dwa ciągi stanowiące bazę to $(2^n)_{n\geq 1}$ oraz $((-1)^n)_{n\geq 1}$. Tylko trzeba dobrać współczynniki, tj. takie a, b, że

$$\begin{cases} a \cdot (-1)^0 + b \cdot 2^0 &= \alpha \\ a \cdot (-1)^1 + b \cdot 2^1 &= \beta \end{cases}.$$

2.5 Warstwy

Patrząc na $\mathbb{R}^2$ podprzestrzenie liniowe mają prostą i naturalną interpretację: są to dokładnie proste przechodzące przez 0. Niestety, żadna inna prosta nie jest podprzestrzenią liniową, choć ma podobne własności.

Takie proste odpowiadają intuicyjnie warstwom, które są zbiorami powstałymi przez „przesunięcie" podprzestrzeni liniowej o ustalony wektor.

Definicja 2.29 (Warstwa)**.** Dla przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ i jej podprzestrzeni liniowej $\mathbb{W}$ zbiór U jest *warstwą* $\mathbb{W}$ w $\mathbb{V}$, jeśli jest postaci

$$U = \vec{u} + \mathbb{W} = \{\vec{u} + \vec{w} \,:\, \vec{w} \in \mathbb{W}\} \ .$$

Zauważmy, że warstwy zwykle *nie są* przestrzeniami liniowymi.

Przykład 2.30.

1. Dla podprzestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ takiej że trzecia współrzędna to 0, warstwami są zbiory wektorów o ustalonej trzeciej współrzędnej.
2. Dla zbioru wektorów spełniających równanie $2x_1 - x_3 = 0$ każda warstwa składa się z wektorów, dla których $2x_1 - x_3$ ma ustaloną wartość.

3. Dla przestrzeni liniowej wielomianów i podprzestrzeni składającej się z wielomianów zerujących się w 2 i 4, warstwy składają się z wektorów o ustalonej wartości w 2 i 4.

Przy dowodzeniu własności warstw pomocne są następujące obserwacje dla sumy zbiorów wektorów, zdefiniowanej analogicznie do sumy podprzestrzeni:

$$U + U' = \{\vec{u} + \vec{u}' \ : \ \vec{u} \in U, \vec{u}' \in U'\}$$

Fakt 2.31. *Dodawanie zbiorów wektorów jest łączne i przemienne, tj.:*

$$U + U' = U' + U \quad (U + U') + U'' = U + (U' + U'')$$

Ponadto dla podprzestrzeni $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *zachodzi*

$$\mathbb{W} + \mathbb{W} = \mathbb{W}$$

Lemat 2.32. *Niech* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *będą przestrzeniami liniowymi, zaś* $U \subseteq \mathbb{V}$*. Następujące warunki są równoważne:*

1. *istnieje wektor* $\vec{u} \in \mathbb{V}$*, taki że* $U = \vec{u} + \mathbb{W}$
2. *istnieje wektor* $\vec{u} \in U$*, taki że* $U = \vec{u} + \mathbb{W}$
3. *dla każdego wektora* $\vec{u} \in U$ *zachodzi* $U = \vec{u} + \mathbb{W}$*.*

Ponadto, następujące warunki są równoważne:

1. *istnieje wektor* $\vec{u} \in \mathbb{V}$*, taki że* $U - \vec{u}$ *jest przestrzenią liniową;*
2. *istnieje wektor* $\vec{u} \in U$*, taki że* $U - \vec{u}$ *jest przestrzenią liniową;*
3. *dla każdego wektora* $\vec{u} \in U$ *zbiór* $U - \vec{u}$ *jest przestrzenią liniową.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.
Pod wieloma względami warstwy są podobne do podprzestrzeni liniowych:

Lemat 2.33. *Niech* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *będzie podprzestrzenią liniową, zaś* U *i* U' *jej warstwami. Wtedy*

$$U = U' \quad \textit{lub} \quad U \cap U' = \emptyset \ .$$

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 2.34. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie przestrzenią liniową, zaś* U *i* U' *warstwami jakichś (niekoniecznie takich samych) podprzestrzeni* $\mathbb{V}$*.*
Wtedy przecięcie $U \cap U'$ *jest puste lub jest warstwą (jakiejś podprzestrzeni).*

Dowód. Rozważmy przecięcie $U \cap U'$. Jeśli jest puste, to teza jest spełniona. Jeśli nie jest, to niech $\vec{v} \in U \cap U'$. Mamy

$$U = \vec{v} + \mathbb{W}$$
$$U' = \vec{v} + \mathbb{W}'$$

dla odpowiednich przestrzeni liniowych $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$. Zauważmy, że

$$U \cap U' = (\vec{v} + \mathbb{W}) \cap (\vec{v} + \mathbb{W}')$$

Wprost z definicji sumy łatwo sprawdzić, że

$$(\vec{v} + \mathbb{W}) \cap (\vec{v} + \mathbb{W}') = \vec{v} + (\mathbb{W} \cap \mathbb{W}')$$

Wiemy, że $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}' \leq \mathbb{V}$ jest podprzestrzenią, i tym samym $U \cap U'$ jest warstwą przestrzeni $\mathbb{W} \cap \mathbb{W}'$. □

Warstwy przestrzeni w $\mathbb{R}^n$ mają naturalną własność wypukłości: jeśli dwa punkty należą do warstwy, to także cała prosta przez nie przechodząca należy do warstwy. Łatwo sprawdzić, że tak jest ogólnie oraz że zachodzi implikacja przeciwna (o ile w ciele $1 + 1 \neq 0$).

Lemat 2.35 (Wypukłość warstw). *Załóżmy, że ciało $\mathbb{F}$ spełnia $1+1\neq 0$.*
Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$, zaś $U\subseteq\mathbb{V}$. Wtedy następujące warunki są równoważne

1. *U jest warstwą (odpowiedniej przestrzeni liniowej)*
2. $\forall_{\alpha\in\mathbb{F},\vec{v},\vec{u}\in U}\quad \alpha\vec{v}+(1-\alpha)\vec{u}=\vec{u}+\alpha(\vec{v}-\vec{u})\in U$

Intuicja: na płaszczyźnie to są punkty na prostej wyznaczonej przez $\vec{u},\vec{v}$.

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli U jest warstwą, to jest postaci $\vec{u}+\mathbb{W}$, dla ustalonego $\vec{u}$ oraz pewnej przestrzeni liniowej $\mathbb{W}$, w szczególności, jej elementy są postaci $\vec{u}+\vec{v}$ dla $\vec{v}\in\mathbb{W}$. Licząc

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})+(1-\alpha)(\vec{u}+\vec{v}')=\vec{u}+(\alpha\vec{v}+(1-\alpha)\vec{v}')$$

i wtedy $\alpha\vec{v}+(1-\alpha)\vec{v}'\in\mathbb{W}$.

$\Leftarrow$ W drugą stronę najlepiej przepisać $\alpha\vec{v}+(1-\alpha)\vec{u}=\vec{u}+\alpha(\vec{v}-\vec{u})$ i tym samym zakładamy że

$$\forall_{\vec{u},\vec{v}\in U,\alpha\in\mathbb{F}}\vec{u}+\alpha(\vec{v}-\vec{u})\in U. \tag{2.2}$$

Ustalmy wektor $\vec{u}$, zdefiniujmy $\mathbb{W}=U-\vec{u}$. Chcemy pokazać, że $\mathbb{W}$ jest podprzestrzenią liniową, czyli że jest zamknięta na operacje.

mnożenie przez skalar jeśli $\vec{w}\in\mathbb{W}$ to $\vec{w}+\vec{u}\in U$. Weźmy $\alpha\in\mathbb{F}$, chcemy pokazać, że $\alpha\vec{w}\in\mathbb{W}$, czyli $\vec{u}+\alpha\vec{w}\in U$. Stosujemy (2.2) dla $\vec{u}\leftarrow\vec{u}$ oraz $\vec{v}\leftarrow\vec{w}+\vec{u}$, oba wektory są w U, wtedy:

$$\vec{u}+\alpha((\vec{w}+\vec{u})-\vec{u})=\vec{u}+\alpha\vec{w}\in U.$$

Czyli $\alpha\vec{w}\in\mathbb{W}$.

dodawanie wektorów Zauważmy najpierw, że jeśli $1+1\neq 0$ to istnieje element odwrotny do $2=1+1$, oznaczmy go przez $\frac{1}{2}$. Wtedy $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}&=\frac{1}{2}(1+1)\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\\&=1\end{aligned}$$

Wracając do głównej części dowodu: jeśli $\vec{v},\vec{v}'\in\mathbb{W}$ to $\vec{v}+\vec{u},\vec{v}'+\vec{u}\in U$ i wtedy

$$\frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{u})+\frac{1}{2}(\vec{v}'+\vec{u})=\frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{v}')+\vec{u}\in U \text{ i tym samym } \frac{1}{2}(\vec{v}+\vec{v}')\in\mathbb{W}\ .$$

Z punktu pierwszego mamy, że $\vec{v}+\vec{v}'\in\mathbb{W}$. □

Przykład/Zastosowanie 2.36 (Kontynuacja Przykładu 2.28). Chcemy zająć się ponownie rekurencjami, tym razem „prawie liniowymi", np.

$$a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}-1\ . \tag{*}$$

Łatwo sprawdzić, że zbiór rozwiązań *nie jest* przestrzenią liniową. Ale z Lematu 2.35 łatwo wynika, że jest on warstwą jakiejś przestrzeni liniowej. Z Lematu 2.32 różnica dwóch elementów z warstwy jest w odpowiadającej przestrzeni liniowej.

Tu są dwa możliwe podejścia.

- Szukamy dobrego wektora. Okazuje się, że wektor mający wszędzie tą samą wartość nadaje się; czyli szukamy α, takiego że

  $$\alpha=\alpha+2\alpha-1$$

  co daje $\alpha=\frac{1}{2}$. Wtedy $b_n=a_n-\frac{1}{2}$ spełnia

  $$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+2a_{n-2}-1 &&\iff\\ b_n+\frac{1}{2}&=b_{n-1}+\frac{1}{2}+2b_{n-2}+2\cdot\frac{1}{2}-1 &&\iff\\ b_n&=b_{n-1}+2b_{n-2}\ ,\end{aligned}$$

  czyli uprościło się do równania liniowego, które rozwiązujemy używając poprzednich metod.

- Nie szukamy jednego wektora, lecz dla konkretnego ciągu dobieramy indywidualnie. Nasz wektor to oryginalny ciąg przesunięty (w indeksie) o jeden element, czyli $(a_{n-1})_{n\geq 0}$. Wtedy odjęcie daje

$$a_{n+1} - a_n = a_n + 2a_{n-1} - a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

I to ponownie daje równanie liniowe, niestety wyższego (3.) stopnia. Wielomian dla niego jest dość skomplikowany, ale *wiemy*, że został on uzyskany jako

$$x \cdot (x^2 - x - 2) - 1(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x^2 - x - 2).$$

To nam też mówi, dlaczego ciąg o wszystkich elementach takich samych zadziałał: bo w bazie ciągów nowej przestrzeni jest wektor odpowiadający ciągowi $(1^n)_{n\geq 0}$.

Rozdział 3

Przekształcenia liniowe

3.1 Przekształcenia liniowe

Definicja 3.1 (Przekształcenie liniowe)**.** Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$. Funkcja $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jest *przekształceniem liniowym*, jeśli spełnia następujące warunki:

- $\forall_{\vec{v}\in\mathbb{V}}\forall_{\alpha\in\mathbb{F}} F(\alpha\vec{v}) = \alpha F(\vec{v})$
- $\forall_{\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{V}} F(\vec{v}+\vec{w}) = F(\vec{v}) + F(\vec{w})$

Alternatywną nazwą dla „przekształcenie liniowe" jest *homomorfizm* , tj. mówimy, że F jest homomorfizmem między przestrzeniami liniowymi $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ (nad tym samym ciałem) wtedy i tylko wtedy, gdy $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jest przekształceniem liniowym. Nazwa ta jest podyktowana tym, że w ogólności „homomorfizm" oznacza przekształcenie między strukturami, które zachowujące działania. (W naszym przypadku: między przestrzeniami liniowymi, zachowują mnożenie przez skalar oraz sumę wektorów).

Przykład 3.2.

- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: suma współrzędnych.
- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: przemnożenie wszystkich współrzędnych przez stałą.
- $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ usunięcie i-tej współrzędnej.
- Pochodna wielomianu — jako funkcja przestrzeni liniowej wszystkich wielomianów (o współczynnikach z $\mathbb{R}$) w nią samą.
- $F : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2$, $F(x, y, z) = (2x + y, y - 3z)$.
- Całka (określona), tj. dla wielomianów ze współczynnikami z $\mathbb{R}$ przekształcenie $(F(f))(x) = \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$.
- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy$ nie jest przekształceniem liniowym.
- $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (y + 3, x - 2)$ nie jest przekształceniem liniowym.
- Rzut (równoległy) na podprzestrzeń; w szczególności rzut prostopadły.
- Obliczenie wielomianu w konkretnym punkcie jest przekształceniem liniowym (tj. ustalamy punkt i jako wejście dostajemy wielomian).

Na zbiorze przekształceń liniowych z $\mathbb{V}$ w $\mathbb{W}$ możemy w naturalny sposób zdefiniować dodawanie i mnożenie (przez skalar) „w punkcie":

$$(F + G)(\vec{v}) = F(\vec{v}) + G(\vec{v})$$
$$(\alpha F)(\vec{v}) = \alpha F(\vec{v})$$

Lemat 3.3. *Zbiór przekształceń liniowych jest przestrzenią liniową.*

Dowód. Należy sprawdzić poprawność definicji, np. że gdy F jest liniowe to również αF jest liniowe:

$$(\alpha F)(\vec{v} + \vec{u}) = \alpha(F(\vec{v} + \vec{u})) = \alpha(F(\vec{v}) + F(\vec{u})) = \alpha F(\vec{v}) + \alpha F(\vec{u}) = (\alpha F)(\vec{v}) + (\alpha F)(\vec{u})$$

Inne pokazujemy podobnie. □

Fakt 3.4. *Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.*

Lemat 3.5. *Każde przekształcenie liniowe jest jednoznacznie zadane poprzez swoje wartości na bazie. Każde takie określenie jest poprawne.*

Dowód. Niech F będzie przekształceniem liniowym, z przestrzeni $\mathbb{V}$, oznaczmy jego wartości na bazie $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ tj. niech $F(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$.

Dla dowolnego $\vec{v} \in \mathbb{V}$ wiemy, że wyraża się ono w bazie, czyli jest postaci $\vec{v} = \sum_i \alpha_i \vec{v}_i$ dla pewnych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. W takim razie

$$\begin{aligned} F(\vec{v}) &= \sum_i \alpha_i \underbrace{F(\vec{v}_i)}_{=\vec{w}_i} \\ &= \sum_i \alpha_i \vec{w}_i \ , \end{aligned}$$

co jest jednoznacznie wyznaczone, bo wyrażenie w bazie jest jedyne.

Poprawność określenia: dla bazy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ ustalym zbiór wartości $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n$. Chcemy pokazać, że przekształcenie zadane jako

$$F(\sum_i \alpha_i \vec{v}_i) = \sum_i \alpha_i \vec{w}_i \ .$$

jest przekształceniem liniowym.

Zajmijmy sie na razie prostszym przypadkiem, gdy $\mathbb{V}$ to $\mathbb{F}^n$ a baza to baza standardowa $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$. Wtedy analogicznie zadane przekształcenie to

$$F \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \sum_i \alpha_i \vec{w}_i \ .$$

Łatwo sprawdzić, że jest liniowe:

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \right) &= F\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \alpha'_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_i (\alpha_i + \alpha'_i)\vec{w}_i \\ &= \sum_i \alpha_i \vec{w}_i + \sum_i \alpha'_i \vec{w}_i \\ &= F \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy dla mnożenia przez skalar.

Jednocześnie złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym: jeśli najpierw wyrażimy wektor $\vec{v}$ w bazie (przekształcenie liniowe) a potem zadamy jak powyżej (przekształcenie liniowe) to dostajemy przekształcenie liniowe, które ma właśność;

$$\vec{v}_i \mapsto \vec{E}_i \mapsto \vec{w}_i$$

czyli faktycznie przekształce $\vec{v}_i$ na $\vec{w}_i$. □

3.2 Jądro i obraz przekształcenia liniowego

Definicja 3.6 (Jądro i obraz przekształcenia liniowego)**.** Niech $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ będą przestrzeniami liniowymi, $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ przekształceniem liniowym.

Jądro przekształcenia to zbiór wektorów przekształcanych na $\vec{0}$:

$$\ker(F) = \{\vec{v} \,:\, F(\vec{v}) = \vec{0}\} \ .$$

Obraz przekształcenia to zbiór wektorów, które są wartościami F:

$$\mathrm{Im}(F) = \{\vec{u} \,:\, \exists \vec{v} F(\vec{v}) = \vec{u}\} \ .$$

Przykład 3.7.

- dla operacji różniczkowania i przestrzeni wielomianów stopnia nie większego niż 5, obrazem jest przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż 4 a jądrem przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż 0.
- dla operacji całkowania przestrzeni wielomianów stopnia obrazem jest przestrzeń wielomianów stopnia różnego niż 0, a jądrem: wielomian zerowy.
- Dla przekształcenia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x + y$ obrazem jest cała prosta $\mathbb{R}$, a jądrem prosta $x = -y$.
- Dla obliczania wartości wielomianu w punkcie, obrazem jest całe $\mathbb{R}$, zaś jądrem: zbiór wielomianów zerujących się w danym punkcie.
- Dla rzutu prostopadłego na podprzestrzeń $\mathbb{W}$, obrazem jest cała podprzestrzeń, zaś jądrem: wszystkie wektory prostopadłe do $\mathbb{W}$.

Lemat 3.8. *Jądro i obraz są przestrzeniami liniowymi.*

Dowód. Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$.

Obraz Jeśli $\vec{w}, \vec{w'} \in \mathrm{Im}(F)$ to istnieją $\vec{v}, \vec{v'} \in \mathbb{V}$ takie że $F(\vec{v}) = \vec{w}$ oraz $F(\vec{v'}) = \vec{w}'$. Wtedy $F(\vec{v} + \vec{v'}) = F(\vec{v}) + F(\vec{v'}) = \vec{w} + \vec{w}'$ też jest w obrazie. Podobnie dla mnożenia przez skalar.

Jądro Jeśli $F(\vec{v}) = \vec{0}$ to $F(\alpha v) = \alpha F(\vec{v}) = \alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Jeśli $F(\vec{v}) = F(\vec{w}) = \vec{0}$ to $F(\vec{v} + \vec{w}) = F(\vec{v}) + F(\vec{w}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. □

Fakt 3.9. *Jeśli $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ jest przekształceniem liniowym oraz $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{V}$ to $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k))$.*

Dowód. Jeśli $w \in \mathrm{Im}(F)$ to $w = F(\vec{v})$ dla pewnego $\vec{v} \in \mathbb{V} = \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$. Czyli $\vec{v} = \sum_i \alpha_i \vec{v}_i$ i tym samym $w = \sum_i \alpha_i F(\vec{v}_i) \in \mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k))$.

Jeśli $w \in \mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k))$, to $w = \sum_i \alpha_i F(\vec{v}_i) = F(\sum_i \alpha_i \vec{v}_i) \in \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$. □

Twierdzenie 3.10. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym, gdzie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$: skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe. Wtedy*

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathrm{Im}(F)) + \dim(\ker(F)).$$

Dowód. Niech $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ będzie bazą jądra. Zgodnie z Lematem 2.16 możemy rozszerzyć ją do bazy $\mathbb{V}$, niech te wektory to $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$. Pokażemy, że $\{F(\vec{u}_1), F(\vec{u}_2), \ldots, F(\vec{u}_m)\}$ jest bazą $\mathrm{Im}(F)$. Z Faktu 3.9 łatwo wynika, że generują obraz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(F) &= \mathrm{LIN}(F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_n), F(\vec{u}_1), \ldots, F(\vec{u}_m)) \\
&= \mathrm{LIN}(\underbrace{\vec{0}, \ldots, \vec{0}}_{\text{nic nie wnoszą}}, F(\vec{u}_1), \ldots, F(\vec{u}_m)) \\
&= \mathrm{LIN}(F(\vec{u}_1), \ldots, F(\vec{u}_m)) \ .
\end{aligned}$$

Pozostaje sprawdzić, że wektory $\{F(\vec{u}_1), F(\vec{u}_2), \ldots, F(\vec{u}_m)\}$ są niezależne. Niech $\sum_i \alpha_i F(\vec{u}_i) = \vec{0}$. Wtedy $F(\sum_i \alpha_i \vec{u}_i) = \vec{0}$ i tym samym $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i \in \ker(F)$. Ale to oznacza, że $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i \in \mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$. Jeśli ten wektor jest niezerowy, to mamy dwa różne przedstawienia tego wektora w bazie: jedno przez wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ a drugie $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$, sprzeczność. Czyli $\sum_i \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$, co oznacza, że wszystkie współczynniki są równe 0, bo wektory $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m$ są z bazy. □

Uwaga. Dowód Twierdzenia 3.10 *nie zadziała*, jeśli weźmiemy na początku dowolną bazę $\mathbb{V}$, np. wszystkie wektory mogą przejść w to samo!

Definicja 3.11. *Rząd* przekształcenia liniowego F to $\mathrm{rk}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F))$.

Fakt 3.12. *Jeśli* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *to* $\mathrm{rk}(F) \leq \min(\dim(\mathbb{V}), \dim(\mathbb{W}))$

Dowód. Ponieważ $\mathrm{Im}(F) \leq \mathbb{W}$ to $\mathrm{rk}(F) = \dim(\mathrm{Im}(F)) \leq \dim(\mathbb{W})$. Drugi punkt wynika z Twierdzenia 3.10. □

Fakt 3.13. *Jeśli* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *jest przekształceniem liniowym i* $F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k) \in \mathbb{W}$ *są liniowo niezależne, to również* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ *są liniowo niezależne.*

Fakt 3.14. *Jeśli* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ *oraz* $F' : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ *są przekształceniami liniowymi, to*

$$\mathrm{rk}(F'F) \leq \min(\mathrm{rk}(F), \mathrm{rk}(F')).$$

Dowód. W oczywisty sposób $\mathrm{Im}(F'F) \leq \mathrm{Im}(F')$, z czego mamy $\mathrm{rk}(F'F) \leq \mathrm{rk}(F')$.

Co do $\mathrm{rk}(F'F) \leq \mathrm{rk}(F)$, rozważmy bazę $\mathrm{Im}(F'F)$: $F'F(\vec{v}_1), \ldots, F'F(\vec{v}_k)$. Wtedy $F(\vec{v}_1), \ldots, F(\vec{v}_k)$ też są niezależne (Fakt 3.13) i są w obrazie F, czyli $k \leq \mathrm{rk}(F)$. □

Rozdział 4

Macierze

Chcemy operować na przekształceniach liniowych: składać je, dodawać, mnożyć itp. W tym celu potrzebujemy jakiegoś dobrego sposobu zapisu. Sposób ten jest formalizowany przy użyciu *macierzy*. Z technicznego punktu widzenia jest prościej najpierw zadać macierze, a dopiero potem wyjaśnić, jak wiążą się z przekształceniami liniowymi.

Definicja 4.1. Macierzą M rozmiaru $m \times n$ nad ciałem $\mathbb{F}$ nazywamy funkcję $M : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$.

Zbiór wszystkich macierzy rozmiaru $m \times n$ nad ciałem $\mathbb{F}$ oznaczamy przez $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

Zwykle macierz rozmiaru $m \times n$ oznaczamy jako tabelę:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} .$$

(Typem nawiasów za bardzo się nie przejmujemy). Zauważmy, że indeksy są zapisywane odwrotnie, niż w przypadku współrzędnych na płaszczyźnie.

Dla macierzy piszemy też $(A)_{ij}$ na oznaczenie a_{ij} i używamy podobnych konwencji. Gdy rozmiar macierzy nie jest jasny lub jest nieistotny, zapisujemy macierz jako (a_{ij})

Dla zwiększenia czytelności w zapisie macierzy używamy też przecinków między elementami a_{ij}, nawiasów okrągłych zamiast kwadratowych, przecinków między indeksami w $a_{i,j}$ itp.

4.1 Podstawowe operacje na macierzach

Definicja 4.2. Dodawanie macierzy określone jest po współrzędnych, tzn. dodawanie $A + B$ jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy A, B są tego samego rozmiaru i wtedy

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} .$$

Mnożenie przez skalar również określone jest po współrzędnych, tzn. dla macierzy $A = (a_{ij})$ nad ciałem $\mathbb{F}$

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij} .$$

Tym samym macierze stanowią przestrzeń liniową (nad odpowiednim ciałem). Wektorem zerowym jest macierz złożona z samych zer.

4.1.1 Ważne i ciekawe macierze

Przykład 4.3. W poniższym przykładzie domyślnie zajmujemy się macierzami rozmiaru $m \times n$

1. *macierz zerowa* macierz składająca się z samych 0. Zwykle zapisujemy ją jako $\mathbf{0}$
2. macierz $\mathbf{1}_{ij}$ macierz, w której $a_{ij} = 1$ i wszystkie inne elementy są zerowe
   (Macierz ta zwana czasem *macierzą indykacyjną*, ale to nie jest dobra nazwa).

3. *macierz kwadratowa* Macierz rozmiaru $n \times n$

4. *macierz przekątniowa* macierz kwadratowa, która ma same zera poza przekątną $(a_{ii})_{i=1,\dots,n}$.

5. *macierz identycznościowa/jednostkowa* macierz przekątniowa, która ma jedynki na przekątnej $((a_{ii})_{i=1,\dots,n})$. Zapisywana jako Id_n.

$$\mathrm{Id}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

6. *macierz górnotrójkątna* macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy $(a_{ij})_{i>j}$ są zerowe

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

7. *macierz dolnotrójkątna* macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy $(a_{ij})_{i<j}$ są zerowe

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. *macierz trójkątna* macierz dolnotrójkątna lub górnotrójkątna

4.1.2 Zestawianie macierzy

Mając dwie macierze M, M' rozmiaru $m \times n$ oraz $m \times n'$ (nad tym samym ciałem) będziemy pisać

$$\left[M|M'\right]$$

na macierz rozmiaru $m \times (n+n')$ uzyskaną przez „zestawienie" macierzy M, M'. Rozszerzamy tę konwencję na wiele macierzy $M_1, M_2, \dots, M_k$ rozmiaru $m \times n_1$, $m \times n_2$, $\dots$, $m \times n_k$ i piszemy $[M_1|M_2|\cdots|M_k]$. Jeśli macierze te są wymiaru $m \times 1$ to zwykle używamy liter $C_1, \dots, C_k$, jako że są to kolumny wynikowej macierzy. W takim przypadku czasem piszemy też $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots$ jeśli z jakiegoś powodu myślimy o tych kolumnach również jako o wektorach (co będzie częste).

Uwaga. Macierze są powodem, dla którego piszemy wektory z $\mathbb{F}^n$ wielkimi literami: są to macierze wymiaru $n \times 1$.

I od teraz wektory domyślnie są w pionie.

Podobnie zestawiamy macierze w pionie: dla macierzy M, M' rozmiaru $m \times n$ i $m' \times n$ piszemy

$$\left[\frac{M}{M'}\right]$$

na „zestawienie" tych dwóch macierzy w pionie (w tym wypadku jest ono rozmiaru $(m+m') \times n$). Ponownie używamy tej notacji dla wielu macierzy $M_1, M_2, \dots, M_k$, jeśli macierze mają tylko jeden wiersz to zwykle oznaczamy je jako $R_1, R_2, \dots, R_m$ (bo są to wiersze).

4.1.3 Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy zdefiniujemy najpierw dla macierzy $1 \times n$ oraz $n \times 1$.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \ .$$

Wynik, w zależności od potrzeb, traktujemy jako liczbę (z ciała $\mathbb{F}$) lub jako macierz 1×1.

Mnożenie wektorów $m \times 1$ oraz $1 \times n$ definiujemy jako:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_ma_1 & b_ma_2 & \cdots & b_ma_n \end{array}\right] \ .$$

Następnie rozszerzamy mnożenie do macierzy rozmiaru $m \times k$ i $k \times n$ (wynikiem jest macierz rozmiaru $m \times n$). Mnożenie definiujemy tak, że dzielimy lewą macierz na wiersze a prawą na kolumny i mnożymy jak dwa wektory (odpowiednio: wierszy i kolumn), przy czym pojedyncze mnożenie wiersza i kolumny wykonujemy jak mnożenie wektorów.

$$\left[\begin{array}{c} R_1 \\ \hline R_2 \\ \hline \vdots \\ \hline R_m \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} R_1C_1 & R_1C_2 & \cdots & R_1C_n \\ \hline R_2C_1 & R_2C_2 & \cdots & R_2C_n \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline R_mC_1 & R_mC_2 & \cdots & R_mC_n \end{array}\right] \ .$$

Używając notacji z indeksami, jeśli $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}}$, to $C = AB$ ma postać $(c_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$, gdzie

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} \ .$$

Uwaga. Zauważmy, że możliwy jest też odwrotny podział: lewa macierz jako wektor kolumn a prawa jako wektor wierszy. Wykonując bezpośrednie rachunki można łatwo sprawdzić, że wynik jest ten sam.

Fakt 4.4. *Mnożenie macierzy jest łączne.*

Dowód. Dowód to prosty rachunek, który zostawiamy jako ćwiczenie. □

Fakt 4.5. *Niech A, B, C będą macierzami nad tym samym ciałem $\mathbb{F}$, Id_n macierzą identycznościową $n \times n$, $\alpha \in \mathbb{F}$. Wtedy poniższe równości zachodzą, dla macierzy odpowiednich rozmiarów (tzn. takich, że odpowiednie mnożenie/dodawanie jest określone):*

1. $\mathrm{Id}_n A = A$, $B \,\mathrm{Id}_n = B$;
2. $A(B + C) = AB + AC$;
3. $(B + C)A = BA + CA$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
5. $A[B|C] = [AB|AC]$;
6. $\left[\dfrac{B}{C}\right] A = \left[\dfrac{BA}{CA}\right]$.

Dowód sprowadza się do prostych rachunków i zostanie pokazany na ćwiczeniach.

Przykład/Zastosowanie 4.6. Jak obliczać wyrazy ciągu Fibonacciego szybko?

Robienie tego przy użyciu wzorów z potęgami liczb niewymiernych nie jest praktyczne: powstają błędy zaokrągleń, mnożenie liczb rzeczywistych jest kosztowne. Choć wciąż działa to proporcjonalnie do $\log n$, a nie n, gdy chcemy policzyć n-ty wyraz.

Zapiszmy kolejne wartości jako wektory:

$$\begin{bmatrix} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f_2 = 1 \\ f_3 = 2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} \ .$$

Zauważmy, że rekurencją możemy zapisać w postaci macierzy:

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} \ .$$

Wartości początkowe wpisujemy w wektor. Wtedy kolejne nałożenia to kolejne potęgi:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{bmatrix} \ .$$

Zauważmy, że dzięki temu możemy policzyć f_n podnosząc naszą macierz do n-tej potęgi, co można wykonać w czasie proporcjonalnym do $\log n$.

4.1.4 Transpozycja

Definicja 4.7 (Transpozycja)**.** Dla macierzy $M = (m_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ macierz M^T zdefiniowana jest jako

$$M^T = (m_{ji})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

to jest jako „obrót" wokół przekątnej.

Przykład 4.8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Lemat 4.9. *Dla macierzy M, N odpowiednich rozmiarów zachodzi*

$$\begin{aligned} (M+N)^T &= M^T + N^T \ , \\ (MN)^T &= N^T M^T \ , \\ (M^T)^T &= M \ . \end{aligned}$$

Prosty dowód zostanie pokazany na ćwiczeniach.

4.2 Wartości na wektorach jednostkowych

Zdefiniujmy macierze rozmiaru $n \times 1$ (wektory) $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$, wektor $\vec{E}_i$ ma 1 na i-tej współrzędnej oraz 0 wszędzie poza tą pozycją (czyli inne spojrzenie na bazę standardową).

Lemat 4.10 (Bardzo ważny)**.**

$$M = \left[\ M\vec{E}_1 \ \middle| \ M\vec{E}_2 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ M\vec{E}_n \ \right]$$

Dowód. Dowód można pokazać wprost z definicji, lub też zastosować trik:

$$\mathrm{Id}_n = \left[\ \vec{E}_1 \ \middle| \ \vec{E}_2 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \vec{E}_n \ \right]$$

i tym samym

$$M = M \, \mathrm{Id}_n = M \left[\ \vec{E}_1 \ \middle| \ \vec{E}_2 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ \vec{E}_n \ \right] = \left[\ M\vec{E}_1 \ \middle| \ M\vec{E}_2 \ \middle| \ \cdots \ \middle| \ M\vec{E}_n \ \right] \quad \square$$

Uwaga. To jest bardzo użyteczna własność: często zamiast pokazać równość macierzy czy też pomnożyć jakieś macierze będziemy liczyli wartości na wektorach $\vec{E}_i$.

Przykład/Zastosowanie 4.11 (Kontynuacja Zastosowania 4.6). W pewnym sensie możemy też powiedzieć, skąd wzięliśmy macierz $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ służącą do liczenia wartości wyrazów ciągu Fibonacciego: ma mieć ona własność, że przekształca wektor $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ na $\begin{bmatrix}b\\ a+b\end{bmatrix}$.

W takim razie

$$\begin{aligned} C_1 &= M\vec{E}_1 \\ &= M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\ C_2 &= M\vec{E}_2 \\ &= M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \end{aligned}$$

I wtedy z liniowości mnożenia macierzy łatwo sprawdzić, że faktycznie

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b\\ a+b\end{bmatrix}$$

4.3 Operacje elementarne

Definicja 4.12 (Operacje elementarne.)**.** Operacje elementarne (kolumnowe) to:

- zamiana kolumn;
- dodanie do jednej z kolumn wielokrotności innej;
- przemnożenie kolumny przez niezerowy skalar.

Analogicznie definiujemy operacje elementarne wierszowe.

Operacje elementarne można wyrazić jako macierze:

zamiana kolumn macierz T_{ij} ma następujące wyrazy: na przekątnej 1, poza ii, jj, gdzie T_{ij} ma 0, oprócz przekątnej ma same 0, poza ij, ji, gdzie ma 1.

$$T_{3,6} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

dodanie wielokrotności kolumny $\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij}$

$$\mathrm{Id}_7 + 3 \cdot 1_{3,6} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & 3 & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

przemnożenie kolumny przez skalar $D_{i\alpha}$ to macierz przekątniowa, która na pozycji ii ma $\alpha \neq 0$ a pozostałe elementy na przekątnej to 1.

$$D_{3,2} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Lemat 4.13 (Operacje elementarne jako macierze).

- *$M \cdot T_{ij}$ to macierz powstała przez zamianę i-tej oraz j-tej kolumny.*
- *$M \cdot (\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})$ to macierz powstała przez dodanie do j-tej kolumny α razy i-tej kolumny.*
- *$M \cdot (D_{i\alpha})$ to macierz powstała przez przemnożenie i-tej kolumny przez α .*

W szczególności:

- $T_{ij} \cdot T_{ij} = \mathrm{Id}$
- $(\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij}) \cdot (\mathrm{Id}_n - \alpha 1_{ij}) = \mathrm{Id}_n$
- $D_{i\alpha} D_{i1/\alpha} = \mathrm{Id}_n$.

Dowód. Wszystkie fakty można pokazać przez bezpośrednie obliczenia, ale skorzystamy z Lematu 4.10 aby uzyskać ładną interpretację.

Rozważmy $M' = M \cdot T_{ij}$. Jej kolumny to wartości mnożenia kolejnych wektorów $\vec{E}_k$ przez M. Popatrzmy na $MT_{ij}\vec{E}_k$. Jeśli $k \notin \{i, j\}$ to $T_{ij}\vec{E}_k = \vec{E}_k$ i tym samym, $M'\vec{E}_k = M\vec{E}_k$, czyli M' oraz M mają te same kolumny $k \notin \{i, j\}$. Z drugiej strony $T_{ij}\vec{E}_i = \vec{E}_j$ i tym samym $M'\vec{E}_i = M\vec{E}_j$, czyli i-ta kolumna M' to j-ta kolumna M. Tak samo jest dla j. Czyli faktycznie M' powstaje przez zamianę i-tej oraz j-tej kolumny.

Rozumowanie dla $M \cdot (\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})$ jest analogiczne: rozważmy

$$M \cdot (\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})\vec{E}_k = M\vec{E}_k + \alpha M 1_{ij}\vec{E}_k \tag{4.1}$$

Zauważmy, że

$$1_{ij}\vec{E}_k = \begin{cases} \vec{0} & \text{dla } k \neq j \\ \vec{E}_i & \text{dla } k = j \end{cases} .$$

Wtedy (4.1) wynosi:

$$M\vec{E}_k + \alpha M 1_{ij}\vec{E}_k = \begin{cases} M\vec{E}_k & \text{dla } k \neq j \\ M\vec{E}_j + \alpha M\vec{E}_i & \text{dla } k = j \end{cases}$$

tj. w pierwszym przypadku jest to po prostu k-ta kolumna M, w drugim j-ta + α razy i-ta.

Dowód dla macierzy $D_{i\alpha}$ jest analogiczny, zauważmy, że możemy potraktować ją jako macierz $\mathrm{Id} + (\alpha - 1)1_{ii}$.

Podane równości łatwo udowodnić używając ich interpretacji: dla przykładu rozważmy $T_{ij}T_{ij}$ zinterpretowane jako $\mathrm{Id}\, T_{ij}T_{ij}$. Chcemy pokazać, że ich iloczyn wynosi Id. Wtedy $T_{ij}T_{ij}$ zamienia i-tą i j-tą kolumnę i potem znów zamienia te kolumny, czyli otrzymujemy macierz Id. Dowód dla pozostałych operacji jest podobny. □

Analogiczną interpretację można uzyskać też dla operacji wierszowych:

Lemat 4.14.

1. *Dla M odpowiedniego rozmiaru $T_{ij}M$ jest macierzą powstałą z M przez zamianę i-tego oraz j-tego wiersza.*
2. *Dla M odpowiedniego rozmiaru $(\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})M$ jest macierzą powstałą z M poprzez dodanie do i-tego wiersza α razy j-tego wiersza.*

3. *Dla M odpowiedniego rozmiaru $(D_{i\alpha}) \cdot M$ to macierz powstała przez przemnożenie i-tego wiersza M przez α .*

Uwaga. Zwróćmy uwagę, że dla macierzy $\mathrm{Id} + \alpha 1_{ij}$ zmienia się, który wiersz dodajemy do którego (w porównaniu z kolumnami). (Nie będzie to jednak istotne, zwykle używamy tylko, że taką operację da się wykonać macierzami tego typu.)

Dowód. Dowód można przeprowadzić wprost, przez bezpośrednie rachunki, ale prościej jest odwołać się do transpozycji, np.:

$$T_{ij}M = ((T_{ij}M)^T)^T = (M^T T_{ij}^T)^T = (M^T T_{ij})^T$$

przy czym $M^T T_{ij}$ jest macierzą M^T w której zamieniono i-tą oraz j-tą kolumnę, tak więc po transpozycji jest to M w której zamieniono i-ty i j-ty wiersz.

Podobnie dowodzimy pozostałych własności, warto przy tym zauważyć, że $1_{ij}^T = 1_{ji}$. □

Definicja 4.15 (Macierze elementarne)**.** Macierze odpowiadające operacjom elementarnym, tj. T_{ij} dla $i \neq j$, $(\mathrm{Id}_n + \alpha 1_{ij})$ dla $i \neq j$ oraz $D_{i\alpha}$ dla $\alpha \neq 0$ nazywamy *macierzami elementarnymi.*

Zauważmy, że tym samym możemy zinterpretować cały proces eliminacji Gauβa jako kolejne działania macierzy elementarnych.

Fakt 4.16. *Eliminację Gauβa można zinterpretować jako mnożenie macierzy powstałej przez zestawienie wektorów (w wierszach/kolumnach) z układu wejściowego przez macierze elementarne (odpowiednio z lewej lub prawej strony).*

4.4 Przekształcenie liniowe dla macierzy

Od teraz (w zasadzie do końca) wektory zapisujemy w pionie i identyfikujemy je z macierzami $n \times 1$.

Dla macierzy M rozmiaru $m \times n$ możemy zadać przekształcenie liniowe $F_M : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ przez

$$F_M(\vec{V}) = M\vec{V} \ .$$

Liniowość wynika z liniowości mnożenia macierzy.

Takie przekształcenie będziemy nazywać *przekształceniem indukowanym przez macierz M.*

Twierdzenie 4.17. *Przyporządkowanie $M \mapsto F_M$ jest izomorfizmem (przestrzeni liniowych) zbioru macierzy $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ i zbioru przekształceń liniowych z $\{F : F$ jest przekształceniem liniowym, $F : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m\}$.*

Pozostaje sprawdzić, jak wyraża się składanie tak zadanych przekształceń.

Twierdzenie 4.18. *Dla macierzy odpowiednich rzędów mamy*

$$F_{M'M} = F_{M'}F_M$$

tzn. przekształcenia zadane przez iloczyn macierzy $M'M$ jest złożeniem przekształceń zadanych przez macierze M' i M.

Dowód. Należy pokazać, że

$$F_{M'M}(\vec{V}) = F_{M'}F_M(\vec{V})$$

Co jest oczywiste, bo obie strony to tylko inne nawiasowania mnożenia macierzy $M'M\vec{V}$. □

4.5 Rząd macierzy

Definicja 4.19 (Rząd macierzy)**.** Rząd macierzy to wymiar przestrzeni generowanej przez kolumny tej macierzy (traktowanych jako wektory w $\mathbb{F}^n$). Oznaczamy go przez $\mathrm{rk}(M)$. Tj. jeśli $M = [\vec{M}_1|\vec{M}_2|\cdots|\vec{M}_n]$ to

$$\mathrm{rk}(M) = \dim \mathrm{LIN}(\vec{M}_1, \ldots, \vec{M}_n)$$

Lemat 4.20. *Niech M będzie macierzą a F_M indukowanym przez nią przekształceniem liniowym. Wtedy*

$$\mathrm{rk}(M) = \mathrm{rk}(F_M)$$

Dowód. Rozważmy bazę standardową $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$. Wtedy wektory $F_M\vec{E}_1, \ldots, F_M\vec{E}_n$ generują obraz $\operatorname{Im} F_M$. Jednocześnie są to kolumny macierzy M. □

Ta obserwacja pozwala przełożyć znane nam wyniki dotyczące rzędu przekształceń liniowych na macierze. Np.

Lemat 4.21. *Dla macierzy M, N odpowiednich rozmiarów zachodzi*

$$\operatorname{rk}(MN) \leq \min(\operatorname{rk}(M), \operatorname{rk}(N))$$

Dowód. Popatrzmy na przekształcenia $F_M, F_N, F_{MN} = F_M \circ F_N$. Odpowiednia nierówność zachodzi dla ich rzędów a zgodnie z Lematem 4.20 rzędy macierzy i ich indukowanych przekształceń są równe. □

Uwaga. Pokazanie tego bezpośrednio z macierzy jest nieoczywiste: to pokazuje użyteczność patrzenia na macierze i na przekształcenia liniowe jednocześnie.

Tak zdefiniowany rząd nazwiemy na potrzebę kolejnego dowodu *rzędem kolumnowym*, analogicznie można zdefiniować *rząd wierszowy*. Okazuje się, że są one równe.

Twierdzenie 4.22. *Rząd kolumnowy i wierszowy ustalonej macierzy M są sobie równe.*
W szczególności, $\operatorname{rk}(M) = \operatorname{rk}(M^T)$.

Pokażemy dowód tego faktu oparty na algorytmie eliminacji Gauβa.

Lemat 4.23. *Operacje elementarne kolumnowe (wierszowe) na macierzach nie zmieniają rzędu wierszowego i kolumnowego macierzy.*

Dowód. Pokażemy dowód w przypadku operacji kolumnowych, dla operacji wierszowych przebiega tak samo (lub możemy przejść przez transpozycję do przypadku operacji kolumnowych).

Z Lematu 1.18 operacje kolumnowe nie zmieniają otoczki liniowej i tym samym nie zmieniają rzędu kolumnowego.

Pozostaje nam pokazać, że operacje kolumnowe nie zmieniają rzędu wierszowego.

Skorzystamy z Lematu, który udowodnimy trochę później (Fakt 4.31): jeśli A, A' są kwadratowe oraz $AA' = A'A = \mathrm{Id}$, to dla macierzy odpowiednich rozmiarów mamy

$$\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(B) \quad \operatorname{rk}(CA) = \operatorname{rk}(C) \ .$$

Chcemy pokazać, że rząd wierszowy BE oraz B, gdzie E jest macierzą elementarną, są takie same. Zauważmy, że istnieje macierz elementarna E' taka że $E'E = EE' = \mathrm{Id}$. Czyli chcemy pokazać, że $\operatorname{rk}((BE)^T) = \operatorname{rk}(B^T)$. Zauważmy, że $(E')^T E^T = \mathrm{Id}$, czyli z Faktu 4.31 mamy, że faktycznie te rzędy są równe. □

Lemat 4.24. *Dla macierzy w wierszowej postaci schodkowej rząd wierszowy i kolumnowy macierzy jest taki sam.*

Analogiczne stwierdzenie zachodzi dla macierzy w kolumnowej postaci schodkowej.

Dowód. Niech macierz $M = (m_{i,j})$ w wierszowej postaci schodkowej ma wiodące elementy na pozycjach $(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (k, j_k)$, gdzie dla wiersza i oraz $j' < j_i$ mamy $m_{i,j'} = 0$ oraz k jest rzędem wierszowym.

$$\begin{bmatrix}
\underbrace{1}_{(1,j_1)=(1,1)} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \underbrace{2}_{(2,j_2)=(2,3)} & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{(3,j_3)=(3,5)} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \underbrace{5}_{(k,j_k)} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Przeprowadzamy eliminację Gauba na kolumnach: używając elementu $(1, j_1)$ usuwamy wszystkie niezerowe elementy w wierszu 1., potem elementu $(2, j_2)$ wszystkie w wierszu 2., itd. Po tej operacji w każdym wierszu i kolumnie mamy najwyżej jeden niezerowy element.

$$\begin{bmatrix}
\underbrace{1}_{(1,j_1)=(1,1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \underbrace{2}_{(2,j_2)=(2,3)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{-1}_{(3,j_3)=(3,5)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \underbrace{5}_{(k,j_k)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Czyli jest k liniowo niezależnych kolumn, czyli rząd kolumnowy to k.

Dowód dla kolumnowej postaci schodkowej przeprowadzamy analogicznie (albo przechodzimy przez transpozycje i korzystamy z wierszowej postaci schodkowej). □

dowód Twierdzenia 4.22. Stosujemy eliminację Gauba. Oba rzędy się nie zmieniają (Lemat 4.23). Dla macierzy w postaci schodkowej teza zachodzi z Lematu 4.24. □

Dlatego od tego momentu mówimy po prostu o rzędzie macierzy.

Uwaga. Przy liczeniu liniowej niezależności dla zbioru wektorów możemy wykonywać *zarówno* operacje wierszowe jak i kolumnowe. Proszę jednak pamiętać, że wykonywanie operacji kolumnowych nie zmienia przestrzeni rozpiętej przez kolumny, natomiast wykonanie operacji wierszowych może zmienić tę przestrzeń (i zwykle zmienia). Tym samym jeśli mieszamy te operacje, to nie umiemy powiedzieć, np. jaka jest baza przestrzeni rozpiętej przez układ wektorów.

Tym niemniej, jeśli stosujemy oba typy operacji, ale użyjemy tylko wierszy $\{i_1, \dots, i_k\}$ do eliminacji (i jakichś kolumn) i na końcu odpowiadające wiersze są niezależne (a pozostałe zerami), to odpowiadające wiersze z wejścia są niezależne.

4.6 Obliczanie bazy jądra przekształcenia

Jako przykładowe zastosowaniem macierzy, pokażemy jak obliczyć bazę jądra przekształcenia indukowanego przez macierz M (zwanego dalej po prostu jądrem macierzy).

Napiszmy

$$M \operatorname{Id}_n = M$$

Wykonujemy teraz eliminację Gauba (na kolumnach) tak długo, aż doprowadzimy M (po prawej stronie) do postaci schodkowej (kolumnowej). Zauważmy, że możemy myśleć o tych operacjach jak o macierzach, czyli odpowiadają one mnożeniu z prawej strony obu stron równości przez te same macierze, czyli wykonywaniu tych samych operacji kolumnowych na M oraz Id_n (czy też dokładniej macierzy, która tam jest).

Na końcu otrzymujemy zależność postaci:

$$MA = M'$$

gdzie M' jako pierwsze kolumny zawiera wektory niezależne, a potem same wektory zerowe. Ale to oznacza, że przy mnożeniu przez M odpowiednie wektory w macierzy A przechodzą na wektory $\vec{0}$. W czasie trwania procesu kolumny A pozostają niezależne (bo to jest eliminacja Gauba), czyli odpowiednie kolumny stanowią bazę jądra.

Zauważmy, że M po lewej stronie potrzebne jest tylko do dowodu, w samym algorytmie możemy go nie używać. Innymi słowy, algorytm trzyma parę macierzy (początkowo: (M, Id_n)) i wykonujemy na obu z nich takie same operacje kolumnowe, tak by doprowadzić M do postaci schodkowej (kolumnowej). Wtedy kolumny w drugiej macierzy odpowiadające kolumnom $\vec{0}$ z pierwszej to baza jądra.

Zauważmy, że w istocie dostaliśmy coś więcej: wektory odpowiadające niezerowym wektorom w postaci schodkowej M, przechodzą na bazę obrazu. Czyli przy okazji skonstruowaliśmy wektory $v_1, \dots, v_k$ takie że $Mv_1, \dots, Mv_k$ stanowią bazę obrazu M.

Przykład 4.25. Dla macierzy

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(3)-(1)} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Wykonując analogiczne operacje na macierzy Id_3:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+(3)-(1)} \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} .$$

Łatwo sprawdzić, że faktycznie wektor $[-1,1,1]^T$ należy do jądra. Z drugiej strony, wymiar jądra to $\dim(\mathbb{R}^3)-2=1$, czyli faktycznie ten wektor stanowi bazę jądra.

4.7 Macierz odwrotna

Definicja 4.26. Macierz kwadratowa, dla której istnieje macierz M' taka że

$$M \cdot M' = M' \cdot M = \mathrm{Id}_n \ ,$$

nazywamy macierzą *odwracalną* lub macierzą *nieosobliwą*. Macierz M' o właściwościach jak wyżej nazywamy *macierzą odwrotną do* M i oznaczamy przez M^{-1}.

Lemat 4.27. *Macierz M jest odwracalna $\iff$ przekształcenie F_M jest odwracalne. Co więcej, $F_{M^{-1}} = F_M^{-1}$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli M^{-1} to macierz odwrotna do M, to $MM^{-1} = \mathrm{Id}$ i tym samym

$$\begin{aligned} F_M F_{M^{-1}} &= F_{MM^{-1}} \\ &= F_{\mathrm{Id}} \\ &= \mathrm{Id} \end{aligned}$$

analogicznie $M^{-1}M = \mathrm{Id}$ implikuje $F_{M^{-1}}F_M = \mathrm{Id}$.

$\Leftarrow$ W drugą stronę rachunki są analogiczne: jeśli $F_M F_{M'} = \mathrm{Id}$ to z jednej strony

$$F_M F_{M'} = F_{MM'}$$

zaś z drugiej

$$\mathrm{Id} = F_{\mathrm{Id}}$$

i tym samym $MM' = \mathrm{Id}$. Analogicznie $F_{M'}F_M = \mathrm{Id}$ implikuje, że $M'M = \mathrm{Id}$ i tym samym M' jest macierzą odwracalną. □

Twierdzenie 4.28. *Macierz A wymiaru $n \times n$ jest odwracalna $\iff$ $\mathrm{rk}(A) = n$.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli A jest odwracalna to L_A też jest odwracalne, w szczególności jest różnowartościowe. Czyli $\dim\ker L_A = 0$ i tym samym

$$n = \mathrm{rk}(L_A) + \dim\ker L_A$$

implikuje, że $\mathrm{rk}(L_A) = n$ i w takim razie $\mathrm{rk}\, A = n$.

$\Leftarrow$ Niech $A = [A_1|A_2|\cdots|A_n]$. Zgodnie z założeniem, wektory $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, czyli są bazą. Rozpatrzmy $F = F_A$. Zadajemy przekształcenie odwrotne F^{-1} na wektorach $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ jako $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots, \vec{E}_n$. Tak zadane F^{-1} istnieje, zgodnie z Lematem 3.5. Wtedy

$$FF^{-1}A_i = F\vec{E}_i = A_i$$

Czyli FF^{-1} jest identycznością na bazie, czyli jest identycznością. Analogicznie

$$F^{-1}F\vec{E}_i = F^{-1}A_i = \vec{E}_i$$

czyli $F^{-1}F$ też jest identycznością. W takim razie F jest odwracalne, czyli też A jest odwracalne, zgodnie z Lematem 4.27. □

Lemat 4.29. *Jeśli A jest macierzą kwadratową $n \times n$ to macierz kwadratowa B jest jej odwrotnością, jeśli $AB = \mathrm{Id}$ lub $BA = \mathrm{Id}$.*

Dowód. Pokażemy, że $AB = \mathrm{Id}$ implikuje, że A^{-1} istnieje i $A^{-1} = B$.

Skoro $AB = \mathrm{Id}$, to $n = \mathrm{rk}(AB) \leq \mathrm{rk}\, A \leq n$, czyli $\mathrm{rk}\, A = n$ i analogicznie $\mathrm{rk}\, B = n$. Z Twierdzenia 4.28 mamy, że A^{-1} istnieje. W takim razie

$$\begin{aligned} AB &= \mathrm{Id} && / \cdot A^{-1} \\ B &= A^{-1} \ . && \end{aligned}$$

□

Dowody poniższych prostych faktów pokażemy na ćwiczeniach.

Fakt 4.30. *Jeśli MN jest odwracalna a M, N są kwadratowe, to również M, N są odwracalne.*

Niech M, N będą odwracalne. Wtedy:

- $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$
- $(M^{-1})^{-1} = M$
- $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$

Proste dowody pozostawiamy jako ćwiczenia.

Fakt 4.31. *Jeśli A jest macierzą odwracalną a B, C są macierzami odpowiednich rozmiarów (tzn. takimi, że mnożenia AB oraz CA są określone) to*

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) \quad \textit{oraz} \quad \mathrm{rk}(CA) = \mathrm{rk}(C) \ .$$

4.8 Jeszcze o eliminacji Gauβa

Lemat 4.32. *Jeśli macierz M jest odwracalna, to przy użyciu eliminacji Gauβa (na wierszach lub kolumnach) można doprowadzić ją do macierzy identycznościowej.*

Używając eliminacji Gauβa zarówno na wierszach jak i na kolumnach można dowolną macierz kwadratową przekształcić do macierzy przekątniowej. Ponadto, można najpierw wykonać wszystkie operacje na wierszach a potem na kolumnach (lub odwrotnie).

Dowód. Postępujemy jak w Lemacie 4.24. Użyjmy eliminacji Gauβa na wierszach, dla operacji na kolumnach jest tak samo. Doprowadzamy macierz M do postaci schodkowej (wierszowej).

Jeśli jest odwracalna, to po przeprowadzeniu eliminacji Gauβa ma na przekątnej same niezerowe elementy. Idąc od dołu możemy kolejno eliminować niezerowe elementy poza przekątną dla kolumny nr $n, n-1, \ldots, 1$, analogicznie do wcześniejszego eliminowanie pod przekątną. A na sam koniec przemnożyć wiersze tak, by na przekątnej były same jedynki, tj., uzyskać macierz jednostkową.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli macierz nie była odwracalna, to używamy operacji na kolumnach: używając niezerowego elementu w pierwszym wierszu eliminujemy wszystkie niezerowe elementy na prawo, potem analogicznie dla kolejnych wierszy. Na koniec zamieniamy kolumny miejscami, żeby niezerowe elementy były na przekątnej.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Lemat 4.32 można zinterpretować jako mnożenie macierzy elementarnych.

Lemat 4.33. *Każdą macierz odwracalną A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych. Co więcej, macierze $D_{i\alpha}$ mogą być ostatnie lub pierwsze.*

Każdą macierz A wymiaru $n \times n$ można przedstawić jako iloczyn (pewnej liczby) macierzy elementarnych oraz macierzy postaci $D_{i,0}$ (lub jednej macierzy przekątniowej).

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

4.9 Metoda algorytmiczna obliczania macierzy odwrotnej

Przedstawimy efektywny sposób obliczania macierzy odwrotnej.

Zapiszmy równanie:

$$A^{-1}A = \mathrm{Id}\,.$$

Dokonujemy diagonalizacji A używając metody eliminacji (dla kolumn). Wiemy, że każda operacja kolumnowa odpowiada przemnożeniu (z prawej strony) przez odpowiednią macierz elementarną. Tym samym w kroku pośrednim mamy równanie postaci

$$A^{-1}A' = B,$$

gdzie B jest macierzą uzyskaną przez zastosowanie tych samych operacji na Id, co na A.

Gdy A' jest macierzą w postaci schodkowej, to albo ma jakąś kolumnę $\vec{0}$ (sprzeczność), albo jest dolnotrójkątna i wtedy przekształcamy ją do macierzy diagonalnej i następnie do Id mnożąc odpowiednio kolumny przez skalar. Te same operacje wykonujemy na macierzy B.

Na końcu uzyskujemy równanie

$$A^{-1}\,\mathrm{Id} = B$$

i tym samym mamy szukaną przez nas macierz A^{-1}.

Przykład 4.34. Obliczmy macierz odwrotną do

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sprowadzamy A do macierzy identycznościowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2((2)+(1)-(3))} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wykonajmy te same operacje na macierzy identycznościowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/2((2)+(1)-(3))} \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(1)}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że faktycznie jest to macierz odwrotna do zadanej.

Uwaga. Łatwo sprawdzić, że ten sam dowód i algorytm działają, gdybyśmy dokonywali operacji na wierszach.

Ma to też algebraiczne wytłumaczenie:

$$M^{-1} = ((M^T)^{-1})^T$$

a algorytm obliczający macierz odwrotną może najpierw transponować, potem policzyć macierz odwrotną i znów transponować. I wtedy operacje kolumnowe na M^T odpowiadają operacjom wierszowym na M.

Rozdział 5

Przekształcenia liniowe i macierze

Wprawka

Wiemy, że dla ustalonych $\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m$ zbiór macierzy M nad $\mathbb{F}$ rozmiaru $m \times n$ jest izomorficzny ze zbiorem wszystkich przekształceń liniowych z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$. W jedną stronę jest łatwo: mając M jego przekształcenie liniowe zadajemy jako

$$L_M(\vec{V}) = M\vec{V} \ .$$

A jak to zrobić w drugą stronę? Dla danego L chcemy skonstruować M takie że $M\vec{V} = L(\vec{V})$. Zauważmy, że i-ta kolumna M to $M\vec{E}_i$. Ale M ma spełniać $M\vec{V} = L(\vec{V})$ dla każdego $\vec{V}$, w szczególności dla $\vec{E}_i$. Czyli $L(\vec{E}_i) = M\vec{E}_i$. I tym samym

$$M = [L(\vec{E}_1)|L(\vec{E}_2)|\cdots|L(\vec{E}_n)] \ .$$

Spróbujmy to uogólnić na dowolne przestrzenie liniowe $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ nad ciałem $\mathbb{F}$ o wymiarach n, m wiemy, że po wyborze ich baz $B_\mathbb{V}, B_\mathbb{W}$ są one izomorficzne $\mathbb{F}^n$ i $\mathbb{F}^m$. Tym samym, mając dowolne przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ możemy reprezentować je jako macierz — ustalamy bazy $B_\mathbb{V}, B_\mathbb{W}$, przekształcamy $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ izomorficznie na $\mathbb{F}^n$ i $\mathbb{F}^m$ (przy użyciu reprezentacji w bazach $B_\mathbb{V}, B_\mathbb{W}$) i potem wyrażamy przekształcenie F w tej reprezentacji.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow{F} & \mathbb{W} \\ \updownarrow{\scriptstyle (\cdot)_{B_\mathbb{V}}} & & \updownarrow{\scriptstyle (\cdot)_{B_\mathbb{W}}} \\ \mathbb{F}^n & \xrightarrow{M} & \mathbb{F}^m \end{array} \tag{5.1}$$

Okazuje się, że całość można zrobić dużo bardziej systematycznie.

5.1 Wyrażanie przekształcenia liniowego w bazie

Definicja 5.1 (Macierz przekształcenia w bazie)**.** Dla przestrzeni liniowych $\mathbb{V}, \mathbb{W}$, przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ oraz $B_\mathbb{V}, B_\mathbb{W}$: baz odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$, gdzie $B_\mathbb{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ oraz $B_\mathbb{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m\}$ macierz $M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)$ (*macierz przekształcenia F wyrażona w bazach $B_\mathbb{V}$ i $B_\mathbb{W}$*) to macierz zadana jako

$$[(F(\vec{v}_1))_{B_\mathbb{W}}|(F(\vec{v}_2))_{B_\mathbb{W}}|\cdots|(F(\vec{v}_n))_{B_\mathbb{W}}] \ .$$

Jest to macierz rozmiaru $m \times n$.

Uwaga. To formalizuje podejście z diagramu 5.1: startujemy z $\mathbb{F}^n$, bierzemy $\vec{E}_i$, przechodzimy do $\mathbb{V}$, czyli mamy $\vec{v}_i$, nakładamy F, mamy $F(\vec{v}_i)$ i potem wracamy do $\mathbb{W}$ wyrażając $F(\vec{v}_i)$ w bazie $B_\mathbb{W}$.

Uwaga. Często $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ oraz $B_\mathbb{V} = B_\mathbb{W}$. Ponadto, dla $\mathbb{V} = \mathbb{F}^n$ i $\mathbb{W} = \mathbb{F}^m$ bazami są zwykle bazy standardowe.

Przykład 5.2. Rozważmy przekształcenie $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jako: $F(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Wtedy jego macierz w bazach standardowych dla $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^2$ to

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozważmy to samo przekształcenie wyrażone w bazach $\{(1,1,1),\ (0,1,1), (1,1,0)\}$ oraz $\{(1,1), (1,-1)\}$. Wektory $\{(1,1,1),\ (0,1,1), (1,1,0)\}$ zostaną przekształcone na odpowiednio:

$$(2,0), (1,0), (2,1) \ ,$$

które wyrażają się w bazie $\{(1,1),(1,-1)\}$ jako

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

Lemat 5.3. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$: przekształcenie liniowe oraz $B_\mathbb{V}, B_\mathbb{W}$ będą bazami odpowiednio $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$, gdzie $B_\mathbb{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$. Wtedy dla każdego wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$:*

$$M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)(\vec{v})_{B_\mathbb{V}} = (F\vec{v})_{B_\mathbb{W}} .$$

Uwaga. Zauważmy, że Lemat 5.3 ponownie mówi nam coś o diagramie 5.1: aby przejść z lewego górnego rogu do prawego dolnego możemy wybrać dowolną ścieżkę („diagram komutuje").

Dowód. Z definicji jest to prawda dla $\vec{v} \in B_\mathbb{V}$: w takim przypadku $(\vec{v})_{B_\mathbb{V}}$ jest jednym z wektorów jednostkowych, powiedzmy $\vec{E}_i$, i tym samym $M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)(\vec{v})_{B_\mathbb{V}}$ to odpowiednia kolumna $M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)$, w naszym wypadku i-ta, która jest zadana jako $(F\vec{v})_{B_\mathbb{W}}$.

W ogólności wynika to z liniowości zauważmy, że zarówno lewa jak i prawa strona są przekształceniami liniowymi (dla argumentu $\vec{v}$) i tym samym wystarczy sprawdzić, że są równe na bazie, co już pokazaliśmy. □

Rozumowanie to przenosi się na macierze oraz na iloczyn macierzy, który odpowiada składaniu przekształceń liniowych.

Lemat 5.4. *Niech $\mathbb{V}, \mathbb{V}', \mathbb{V}''$ będą przestrzeniami liniowymi o bazach B, B', B'', zaś $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}'$, $F' : \mathbb{V}' \to \mathbb{V}''$ przekształceniami liniowymi. Wtedy*

$$M_{BB''}(F'F) = M_{B'B''}(F') \cdot M_{BB'}(F).$$

Dowód. Niech $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. Wystarczy sprawdzić, że na wektorach $(\vec{v}_1)_B, (\vec{v}_2)_B, \ldots, (\vec{v}_k)_B$ (czyli na wektorach $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \ldots \vec{E}_k$ z bazy standardowej) zachodzi

$$M_{BB''}(F'F)(\vec{v}_i)_B = M_{B'B''}(F')M_{BB'}(F)(\vec{v}_i)_B ,$$

bo to pokaże, że odpowiednie kolumny macierzy po lewej i prawej stronie są takie same.

Policzmy prawą stronę:

$$\begin{aligned} M_{B'B''}(F')M_{BB'}(F)(\vec{v}_i)_B &= M_{B'B''}(F')(F\vec{v}_i)_{B'} && \text{z Lematu 5.3} \\ &= (F'F\vec{v}_i)_{B''} && \text{z Lematu 5.3} \end{aligned}$$

Jednocześnie dla lewej strony:

$$M_{BB''}(F'F)(\vec{v}_i)_B = (F'F\vec{v}_i)_{B''} \qquad \text{z Lematu 5.3}$$

Czyli obie strony są równe (i odpowiadają i-tej kolumnie macierzy $M_{BB''}(F'F)$). □

Lemat 5.5. *Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ będzie przekształceniem liniowym zaś $B_\mathbb{V}, B_\mathbb{W}$ dowolnymi bazami $\mathbb{V}$ oraz $\mathbb{W}$. Wtedy*

$$\mathrm{rk}(F) = \mathrm{rk}(M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)) .$$

Dowód. Niech $B_\mathbb{V} = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. $\mathrm{rk}(F) = \dim \mathrm{Im}\, F$ zaś obraz $\mathrm{Im}\, F = \mathrm{LIN}(F\vec{v}_1, \ldots, F\vec{v}_n)$, bo $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ jest bazą. Wyrażenie w bazie jest izomorfizmem, więc $\mathrm{rk}(F) = \dim(\mathrm{LIN}((F\vec{v}_1)_{B_\mathbb{W}}, \ldots, (F\vec{v}_n)_{B_\mathbb{W}})$, a to są dokładnie kolumny $M_{B_\mathbb{V} B_\mathbb{W}}(F)$. □

5.2 Macierz zmiany bazy

Jedną z rzeczy, którą możemy w ten sposób wyrazić, jest macierz zmiany bazy: chcemy mieć w miarę jednolity sposób na przejścia z macierzy w jednej bazie do macierzy w innej bazie. Tj. dla dwóch baz B, B' przestrzeni $\mathbb{V}$ chcemy mieć macierz $M_{BB'}$ taką że dla każdego wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$

$$M_{BB'}(\vec{v})_B = (\vec{v})_{B'}$$

Definicja 5.6 (Macierz zmiany bazy)**.** Dla baz B, B' przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ *macierz zmiany bazy między* B *a* B' $M_{BB'}$ to macierz $M_{BB'}(\mathrm{Id})$.

Lemat 5.7. *Dla baz* B, B' *przestrzeni wektorowej* $\mathbb{V}$ *i dowolnego wektora* $\vec{v} \in \mathbb{V}$ *zachodzi*

$$M_{BB'}(\vec{v})_B = (\vec{v})_{B'}$$

Dowód. Wprost z definicji

$$\begin{aligned} M_{BB'}(\vec{v})_B &= M_{BB'}(\mathrm{Id})(\vec{v})_B \\ &= (\mathrm{Id}\,\vec{v})_{B'} && \text{z Lematu 5.3} \\ &= (\vec{v})_{B'} && \square \end{aligned}$$

Fakt 5.8. *Dla baz* B' *oraz* $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ *macierz zmiany bazy zadana jest jako*

$$M_{BB'} = [(\vec{v}_1)_{B'}|(\vec{v}_2)_{B'}|\cdots|(\vec{v}_n)_{B'}] \ .$$

Dowód. Z definicji

$$M_{BB'}(\mathrm{Id}) = [(\mathrm{Id}\,\vec{v}_1)_{B'}|(\mathrm{Id}\,\vec{v}_2)_{B'}|\cdots|(\mathrm{Id}\,\vec{v}_n)_{B'}] = [(\vec{v}_1)_{B'}|(\vec{v}_2)_{B'}|\cdots|(\vec{v}_n)_{B'}] = M_{BB'} \ . \quad \square$$

Lemat 5.9. *Niech* $B_{\mathbb{V}}, B'_{\mathbb{V}}$ *będą bazami* $\mathbb{V}$*. Wtedy*

$$M_{BB'}M_{B'B} = \mathrm{Id},$$

tzn. są to macierze odwrotne.

Dowód. Policzmy

$$\begin{aligned} M_{BB'}M_{B'B} &= M_{BB'}(\mathrm{Id})M_{B'B}(\mathrm{Id}) && \text{definicja} \\ &= M_{B'B'}(\mathrm{Id}\circ\mathrm{Id}) && \text{Lemat 5.4} \\ &= M_{B'B'}(\mathrm{Id}) \end{aligned}$$

Teraz zgodnie z definicją i-tą kolumną $M_{B'B'}(\mathrm{Id})$ jest $(\mathrm{Id}\,\vec{v}_i)_{B'} = (\vec{v}_i)_{B'}$, gdzie $\vec{v}_i$ jest i-tym wektorem z bazy B'. Ale reprezentacja $\vec{v}_i$ w bazie B' to po prostu $\vec{E}_i$. Czyli

$$M_{B'B'} = [\vec{E}_1|\vec{E}_2|\cdots|\vec{E}_n] = \mathrm{Id} \quad \square$$

Lemat 5.10. *Niech* $F : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *będzie przekształceniem liniowym,* $B_{\mathbb{V}}, B'_{\mathbb{V}}$ *bazami* $\mathbb{V}$ *zaś* $B_{\mathbb{W}}, B'_{\mathbb{W}}$ *bazami* $\mathbb{W}$*. Wtedy*

$$M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F) = M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{V}}}.$$

Dowód. Korzystamy z Lematu 5.4 dla złożenia trzech przekształceń $\mathrm{Id}\circ F\circ\mathrm{Id}$ wyrażonych w odpowiednich bazach

$$\begin{aligned} M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{V}}} &= M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}(\mathrm{Id})M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{V}}}(\mathrm{Id}) \\ &= M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(\mathrm{Id}\circ F\circ\mathrm{Id}) \\ &= M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F) \end{aligned}$$

Alternatywnie, możemy skorzystać z tego, że dwie macierze są równe, jeśli dla każdego $\vec{E}_i$ ich możnenia z $\vec{E}_i$ dają ten sam wynik. Zauważmy też, że $\vec{E}_i = (\vec{v}_i)_B$, jeśli $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ to baza B.

Wtedy

$$\begin{aligned} M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{V}}}\vec{E}_i &= M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)M_{B_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{V}}}(\vec{v}_i)_{B_{\mathbb{V}}} \\ &= M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}M_{B'_{\mathbb{V}}B'_{\mathbb{W}}}(F)(\vec{v}_i)_{B'_{\mathbb{V}}} && \text{Lemat 5.7} \\ &= M_{B'_{\mathbb{W}}B_{\mathbb{W}}}(F\vec{v}_i)_{B'_{\mathbb{W}}} && \text{Lemat 5.3} \\ &= (F\vec{v}_i)_{B_{\mathbb{W}}} && \text{Lemat 5.7} \\ &= M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F)(\vec{v}_i)_{B_{\mathbb{V}}} && \text{Lemat 5.3} \\ &= M_{B_{\mathbb{V}}B_{\mathbb{W}}}(F)\vec{E}_i && \square \end{aligned}$$

Uwaga. Najczęściej będziemy zajmować się przypadkiem, gdy $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ i $B_{\mathbb{V}} = B_{\mathbb{W}}$ i $B'_{\mathbb{V}} = B'_{\mathbb{W}}$.

Przykład 5.11. W $\mathbb{R}^3$ rozpatrzmy bazę standardową E oraz bazę B: $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$.

Wtedy

$$M_{BE} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}, M_{EB} = \begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -0,5\\0,5 & -0,5 & 0,5\\-0,5 & 0,5 & 0,5\end{bmatrix}$$

Można łatwo sprawdzić, że

$$M_{EB}M_{BE} = \mathrm{Id}$$

Rozpatrzmy przekształcenie F, (wyrażone w bazie standardowej) jako

$$M_{EE}(F) = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\-1 & 5 & 1\\-1 & 1 & 5\end{bmatrix}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}M_{BB}(F) &= M_{EB}M_{EE}(F)M_{BE}\\ &= \begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -0,5\\0,5 & -0,5 & 0,5\\-0,5 & 0,5 & 0,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\-1 & 5 & 1\\-1 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -0,5\\0,5 & -0,5 & 0,5\\-0,5 & 0,5 & 0,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 4 & 0\\4 & 0 & 6\\0 & 4 & 6\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Oraz

$$\begin{aligned}M_{EE}(F) &= M_{BE}M_{BB}(F)M_{EB}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,5 & 0,5 & -0,5\\0,5 & -0,5 & 0,5\\-0,5 & 0,5 & 0,5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\2 & -2 & 2\\-3 & 3 & 3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\-1 & 5 & 1\\-1 & 1 & 5\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Rozdział 6

Wyznacznik

6.1 Wyznacznik

Ważna funkcja na macierzach: *wyznacznik*. Uogólnienie objętości (ale ze znakiem).

Jakie własności powinna mieć objętość na zbiorze n wektorów $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ z $\mathbb{F}^n$? ($\det : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$):

(W1) (liniowość) jest funkcją wielo-liniową, tj. liniową dla każdej kolumny:

$$\begin{aligned}\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \alpha\vec{V}_i, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n) &= \alpha \det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_i, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n)\\ \det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_i + \vec{V}_i', \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n) &= \det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_i, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n)\\ &\quad + \det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_i', \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n)\end{aligned}$$

(W2) zastąpienie $\vec{V}_i$ przez $\vec{V}_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j \vec{V}_j$ nie powinno zmieniać wartości

$$\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_i + \sum_{j\neq i} \alpha_j \vec{V}_j, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n) = \det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_i, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n)$$

(W3) na macierzy identycznościowej to jest 1

$$\det(\mathrm{Id}) = 1$$

Jest to tak zwana „aksjomatyczna definicja wyznacznika".

Uwaga. Z dokładnością do znaku, objętość (bryły rozpostartej przez n wektorów) ma te własności:

W1 Jeśli przemnożymy któryś wektor przez skalar, to objętość zmienia się odpowiednio. Jeśli jeden z wektorów jest sumą dwóch, to objętość to suma tych dwóch objętości.

W2 Dodanie do wektora kombinacji innych na poziomie bryły oznacza, że jeden z wierzchołków przesuwamy w hiperpłaszczyźnie równoległej do hiperprzestrzeni rozpostartej przez pozostałe wektory.

W3 Jeśli to są same wektory jednostkowe, to odpowiadająca bryła to hiperkostka i ma ona (z dokładnością do znaku) objętość 1.

Definicja 6.1 (Wyznacznik)**.** *Wyznacznik* macierzy kwadratowej A to jedyna funkcja spełniająca warunki W1–W3. Oznaczamy ją przez $\det(A)$ oraz $|A|$.

Kilka własności, zanim pokażemy coś istotnego.

Fakt 6.2. *Proste własności wyznacznika*

- $\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{0}, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_n) = 0$
- *Jeśli* $\vec{V}_i = \vec{V}_j$ *to* $\det(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n) = 0$.
- *zamiana kolejności dwóch wektorów zmienia znak (objętość ze znakiem)*

$$\det(\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n) = -\det(\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_{i-1}, \vec{V}_j, \vec{V}_{i+1}, \ldots, \vec{V}_{j-1}, \vec{V}_i, \vec{V}_{j+1} \ldots, \vec{V}_n)$$

Uargumentujemy, że taka funkcja jest najwyżej jedna oraz podamy metodę jej liczenia. Formalnie, należałoby pokazać, że taka funkcja w ogóle istnieje. Jej definicja jest dość techniczna, zostanie przedstawiona później (ale już teraz poznamy wszystkie techniki, aby ją liczyć.)

Lemat 6.3. *Jest dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki W1–W3.*

Dowód. Zauważmy, że warunki te oznaczają, że wartość macierzy zmienia się w prosty sposób przy stosowaniu operacji elementarnych (na kolumnach). Czyli możemy stosować eliminację Gauba (być może znak się zmienia przy zmianie kolejności); rozważmy, do czego dojdziemy w zależności od tego, czy układ $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ jest liniowo zależny czy niezależny.

liniowo zależny Jeśli $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ jest liniowo zależny, to używajac eliminacji Gauba otrzymamy kolumnę zerową i tym samym wyznacznik to 0.

liniowo niezależny Jeśli $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ jest liniowo niezależny, to możemy przy użyciu operacji elementarnych przekształcić odpowiadającą macierz do macierzy przekątniowej. A dla niej wyznacznik to iloczyn wartości na przekątnej (co wynika wprost z W1–W3). □

Fakt 6.4.

- *Dla macierzy trójkątnej jest to iloczyn elementów na przekątnej.*
- $\det(A) \neq 0 \iff \mathrm{rk}(A) = n$

Druga własność ma też interpretację w terminach objętości: objętość jest zerowa, jeśli ta bryłą jest tak naprawdę zawarte w bryle mniejwymiarowej, czyli układ wektorów jest liniowo zależny.

6.2 Własności i metody obliczania wyznacznika

Definicja 6.5 (Minor macierzy)**.** *Minorem macierzy M* nazywamy każdą macierz uzyskaną poprzez usunięcie z M pewnego zbioru wierszy i kolumn.

Zwyczajowo $A_{i,j}$ to macierz powstała z A poprzez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Definicja 6.6 (Dopełnienie algebraiczne)**.** Dopełnienie algebraiczne elementu $a_{i,j}$ to $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.

Fakt 6.7 (Rozwinięcie Laplace'a)**.** *Dla macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mamy:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$$

Dowód. Ogólną wersję pozostawiamy jako ćwiczenie, tu pokażemy dowód dla $j = 1$. Z liniowości po pierwszej współrzędnej:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{z liniowości}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{od kolumny } j > 1 \text{ odejmujemy } a_{ij} \text{ razy pierwszą}$$

Używając $i-1$ zamian możemy wprowadzić 1 na przekątną.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Zauważmy, że możemy na tej macierzy przeprowadzić eliminację Gauba, ignorując i-ty wiersz i kolumnę. Dostajemy macierz górnotrójkątną, której wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej.

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| \ . \qquad \square$$

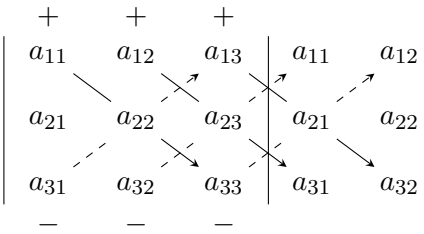
Uwaga. Rozwinięcie Laplace'a moglibyśmy uznać alternatywnie za definicję wyznacznika. Ale wtedy trzeba się trochę pomęczyć z innymi własnościami.

Rozwinięcie Laplace'a pozwala nam na podanie konkretnych wzorów na wyznacznik macierzy 2×2 oraz 3×3.

Przykład 6.8 (Obliczanie małych wyznaczników). Łatwo obliczyć, że wyznacznik macierzy 2×2, zadanej jako $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ to

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ .$$

W przypadku macierzy 3×3 możemy zastosować metodę Sarrusa.



Twierdzenie 6.9 (Cauchy)**.**

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \ .$$

Dowód. Teza łatwo zachodzi, jeśli $|A| = 0$ lub $|B| = 0$: odpowiada to sytuacji, w której $\mathrm{rk}(A) < n$ lub $\mathrm{rk}(B) < n$. A wtedy też $\mathrm{rk}(AB) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B)) < n$. Czyli $|AB| = 0$.

W dalszym dowodzie możemy zakładać, że macierze są rzędu n. W takim razie zgodnie z Lematem 4.33 B można przedstawić jako iloczyn macierzy elementarnych.

Pokażemy najpierw, że

$$|AB| = |A| \cdot |B| \ ,$$

gdzie B jest macierzą elementarną.

- Macierz T_{ij}: przez zamianę i-tej i j-tej kolumny dostajemy Id, czyli $\det(T_{ij}) = -1$. Jednocześnie przemnożenie A przez T_{ij} zamienia miejscami dwie kolumny, czyli zmienia znak wyznacznika na przeciwny:

$$|AT_{ij}| = -|A| = |A| \cdot |T_{ij}| \ .$$

- Macierz $\mathrm{Id}+\alpha 1_{ij}$ (dla $i \neq j$). Przemnożenie przez tą macierz dodaje wielokrotność kolumny do innej kolumny, czyli zgodnie z definicją nie zmienia wartości wyznacznika.

$$|A(\mathrm{Id}+\alpha 1_{ij})| = |A|$$

  Jednocześnie w $\mathrm{Id}+\alpha 1_{ij}$ odejmując od j-tej kolumny α razy i-tą usuwamy niezerowy element poza przekątną, otrzymując Id. Czyli $|\mathrm{Id}+\alpha 1_{ij}| = 1$ i tym samym

$$|A(\mathrm{Id}+\alpha 1_{ij})| = |A| \cdot |\mathrm{Id}+\alpha 1_{ij}|$$

- Macierz $D_{i\alpha}$ przemnaża i-tą kolumnę α razy, jednocześnie $|D_{i\alpha}| = \alpha$. Czyli z liniowości:

$$|A \cdot D_{i\alpha}| = \alpha|A| = |A| \cdot |D_{i\alpha}|$$

Wracając do dowodu. Przez indukcję łatwo stwierdzamy, że dla macierzy elementarnych $A_1, \ldots, A_m$

$$\left| B \prod_{i=1}^{m} A_i \right| = |B| \prod_{i=1}^{m} |A_i| \tag{6.1}$$

$$\left| \prod_{i=1}^{m} A_i \right| = \prod_{i=1}^{m} |A_i| \ . \tag{6.2}$$

Zgodnie z Lematem 4.33 B jest iloczynem macierzy elementarnych, niech

$$B = \prod_{i=1}^{m} B_i \ .$$

Wtedy

$$\begin{aligned} |AB| &= \left| A \cdot \prod_{i=1}^{m} B_i \right| \\ &= |A| \cdot \prod_{i=1}^{m} |B_i| && \text{z (6.1)} \\ &= |A| \cdot \left| \prod_{i=1}^{m} B_i \right| && \text{z (6.2)} \\ &= |A| \cdot |B| \ . && \square \end{aligned}$$

Jest wiele innych dowodów, wszystkie wymagają trochę sprytu lub obserwacji.

Fakt 6.10. *Wyznacznik macierzy oraz macierzy transponowanej jest taki sam, tj.:*

$$\det(A) = \det(A^T) \ .$$

Dowód. Jeśli $\det(A) = 0$ to $\mathrm{rk}(A) < n$ i wtedy $\mathrm{rk}(A^T) < n$ i $\det(A^T) = 0$. Czyli wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\det(A) \neq 0$.

Dowód wynika z Tw. Cauchyego oraz Lematu 4.33: każdą nieosobliwą macierz A można przedstawić jako iloczyn macierzy elementarnych.

$$A = \prod_{i=1}^{k} M_i \ .$$

Wtedy $A^T = \prod_{i=1}^{k} M_{k-i+1}^T$. Łatwo sprawdzić, że dla macierzy elementarnej mamy

$$|M_i| = |M_i^T|.$$

Co daje

$$\begin{aligned}|A^T| &= \left|\prod_{i=1}^{k} M_{k-i+1}^T\right| \\ &= \prod_{i=1}^{k} |M_{k-i+1}^T| \\ &= \prod_{i=1}^{k} |M_{k-i+1}| \\ &= \prod_{i=1}^{k} |M_i| \\ &= \left|\prod_{i=1}^{k} M_i\right| \\ &= |A| \ .\end{aligned}$$

□

Zauważmy, że w konsekwencji operacje wierszowe zmieniają wartość wyznacznika tak samo, jak operacje kolumnowe: aby wykonać operację wierszową, możemy transponować macierz, wykonać odpowiadającą operację kolumnową i z powrotem transponować macierz; zaś transponowanie nie zmienia wyznacznika. W szczególności, w trakcie obliczania wyznacznika możemy używać jednych i drugich operacji.

Fakt 6.11.

- *Dodanie do wiersza macierzy wielokrotności innego wiersza nie zmienia wyznacznika.*
- *Wyznacznik macierzy z zerowym wierszem jest równy* 0*.*
- *Wyznacznik jest funkcją wieloliniową wierszy.*
- *Zamiana dwóch wierszy miejscami zmienia znak wyznacznika na przeciwny.*

Przykład 6.12 (Wyznacznik macierzy Vandermonde'a). Niech $q_1, q_2, \ldots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a $V_n = V(q_1, \ldots, q_n)$ ma wyrazy równe $(V_n)_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V(q_1, \ldots, q_n) = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \ldots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \ldots & q_n^{n-1} \end{bmatrix} \ .$$

Pokażemy, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (q_j - q_i) \ .$$

W szczególności implikuje to, jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

Najpierw odejmujemy pierwszy rząd od każdego kolejnego, dostając

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix} \ .$$

Używamy rozwinięcia Laplace'a dla pierwszej kolumny: jedyny niezerowy wyraz w niej to $a_{11} = 1$, czyli

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \ldots & q_1^{n-1} \\ 0 & q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_2 - q_1 & q_2^2 - q_1^2 & \ldots & q_2^{n-1} - q_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n - q_1 & q_n^2 - q_1^2 & \ldots & q_n^{n-1} - q_1^{n-1} \end{vmatrix} \ .$$

Teraz od i-tej kolumny odejmujemy q_1 razy $i-1$-szą, zaczynajac od prawej strony (czyli eliminacja niezerowych elementów w górnym wierszu)

$$\begin{vmatrix} (q_2-q_1) & (q_2^2-q_1^2)-q_1(q_2-q_1) & \dots & (q_2^{n-1}-q_1^{n-1})-q_1(q_2^{n-2}-q_1^{n-2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q_n-q_1) & (q_n^2-q_1^2)-q_1(q_n-q_1) & \dots & (q_n^{n-1}-q_1^{n-1})-q_1(q_n^{n-2}-q_1^{n-2}) \end{vmatrix} .$$

Po rozwinięciu odpowiednie wyrazy skracają się i dostajemy

$$\begin{vmatrix} q_2-q_1 & q_2^2-q_1q_2 & \dots & q_2^{n-1}-q_1q_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n-q_1 & q_n^2-q_1q_n & \dots & q_n^{n-1}-q_1q_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (q_2-q_1)\cdot 1 & (q_2-q_1)\cdot q_2 & \dots & (q_2-q_1)\cdot q_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (q_n-q_1)\cdot 1 & (q_n-q_1)\cdot q_n & \dots & (q_n-q_1)\cdot q_n^{n-2} \end{vmatrix} .$$

Teraz z liniowości wyjmujemy przed wyznacznik $(q_2-q_1)\cdots(q_n-q_1)$ i dostajemy

$$\prod_{i=2}^{n}(q_i-q_1)\begin{vmatrix} 1 & q_2 & \dots & q_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & \dots & q_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

i teraz przez indukcję.

6.3 Wyznacznik a macierz odwrotna

Fakt 6.13. *Jeśli M jest odwracalna, to*

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)} .$$

Lemat 6.14. *Macierz odwrotna do macierzy A jest równa*

$$\frac{1}{\det(A)}C^T, \text{ gdzie } c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{i,j}| .$$

Dowód. Rozważmy element i,j w mnożeniu macierzy ze sformułowania lematu oraz macierzy A:

$$\frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}|A_{k,i}|a_{k,j} .$$

Z rozwinięcia Laplace'a to jest wyznacznik macierzy A w której w i-tej kolumnie zastąpiliśmy C_i przez C_j (i przemnożyliśmy wszystko przez $\frac{1}{|A|}$). Dla $i=j$ to daje $\det(A)/\det(A)$, dla $i\neq j$ to daje 0. □

Przykład 6.15. Dzięki Lematowi 6.14 można np. łatwo policzyć macierz odwrotną do macierzy 2×2:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} .$$

6.4 Wyznacznik przekształcenia

Potrafimy zdefiniować wyznacznik dla macierzy, ale co z przekształceniem liniowym? Każde przekształcenie zadaje macierz, ale ta macierz zależy od bazy. Okazuje się, że wartość wyznacznika nie.

Lemat 6.16. *Niech $F:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym, zaś M, M' będą macierzami dla tego przekształcenia wyrażonymi w różnych bazach. Wtedy*

$$|M| = |M'|.$$

Dowód. Niech $M_{BB'}$ będzie macierzą przejścia z jednej bazy do drugiej, zaś $M_{B'B}$ z drugiej do pierwszej. Przypomnijmy, że $M_{BB'}M_{B'B} = \mathrm{Id}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\det(M') &= \det(M_{BB'}MM_{B'B}) \\
&= \det(M_{BB'})\det(M)\det(M_{B'B}) \\
&= \det(M_{BB'})\det(M_{B'B})\det(M) \\
&= \frac{1}{\det(M_{B'B})}\det(M_{B'B})\det(M) \\
&= \det(M) \ .
\end{aligned}$$

□

Definicja 6.17. Dla przekształcenia liniowego $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ jego wyznacznik $\det(F)$ to $\det(M)$ gdzie M jest macierzą tego przekształcenia wyrażoną w dowolnej bazie $\mathbb{V}$.

Rozdział 7

Układy równań liniowych i ich rozwiązywanie

Rozważmy układ równań postaci (zwany dalej *układem równań liniowych*)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} .$$

Będziemy zapisywać równania w postaci

$$A\vec{X} = \vec{B} \ , \tag{7.1}$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

7.1 Interpretacja „pionowa”

Zauważmy, że układ ten można zinterpretować jako (przyjmijmy $A = [\vec{A}_1|\cdots|\vec{A}_n]$):

$$\begin{aligned} A\vec{X} &= A\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{E}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i A\vec{E}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i A_i \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

Czyli jaką kombinację liniową wektorów $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_n$ należy wziąć, by dostać wektor $\vec{B}$.

7.2 Interpretacja „pozioma”

Każde równanie z osobna wyznacza warstwę względem przestrzeni $n-1$-wymiarowej (wektorów spełniających ustalone równanie).

7.3 Bazowy przypadek: n zmiennych, n równań, macierz odwracalna

Intuicja: w najprostszym przypadku, gdy A jest macierzą kwadratową, możemy odwrócić A i nałożyć obustronnie na równanie, uzyskując

$$A^{-1}A\vec{X} = \mathrm{Id}\,\vec{X} = \vec{X} = A^{-1}\vec{B}.$$

I tym samym mamy rozwiązanie. Można łatwo sprawdzić, że jest to jedyne rozwiązanie.
Pokażemy teraz, jak wygląda to rozwiązanie.

Twierdzenie 7.1 (Wzory Cramera)**.** *Jeśli w równaniu* (7.1) *macierz A jest kwadratowa i odwracalna, to jedyne rozwiązanie jest postaci $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, gdzie macierz A_{x_i} powstaje poprzez zastąpienie i-tej kolumny A przez $\vec{B}$.*

Dowód. Chcemy policzyć

$$\det(A_{x_i}) = \det(A_1, \ldots, \underbrace{B}_{i\text{-te miejsce}}, \ldots, A_n)$$

Mamy

$$B = AX = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_i x_i A\vec{E}_i = \sum_i x_i A_i$$

Czyli

$$\begin{aligned}\det(A_{x_i}) &= \det(A_1, \ldots, \underbrace{B}_{i\text{-te miejsce}}, \ldots, A_n) \\ &= \det(A_1, \ldots, \underbrace{\sum_j x_j A_j}_{i\text{-te miejsce}}, \ldots, A_n)\end{aligned}$$

Dodajemy teraz wielokrotności innych kolumn, kolumny $j \neq i$ z wielokrotnością $-x_j$, co daje

$$\begin{aligned}&= \det(A_1, \ldots, \underbrace{x_i A_i}_{i\text{-te miejsce}}, \ldots, A_n) \\ &= x_i \det(A)\ .\end{aligned}$$

□

Zauważmy, że wiemy już, że macierz odwrotną do A można wyrazić przez dopełnienia algebraiczne (Lemat 6.14). Nakładając ją na wektor B można otrzymać wzory Cramera bezpośrednio.

7.4 Ogólne układy równań liniowych

Chcemy jednak zająć się tym problemem w większej ogólności:

- co jeśli A nie jest odwracalna? Czy wtedy rozwiązań jest wiele, czy może 0?
- co jeśli A nie jest kwadratowa (w szczególności: nieodwracalna)? Czym różnią się przypadki:
  - jest więcej równań, niż zmiennych?
  - jest więcej zmiennych, niż równań?

7.4.1 Układy jednorodne

Zajmijmy się trochę mniej ogólnym problemem: co jeśli $\vec{B} = \vec{0}$? Taki układ nazywamy *jednorodnym*. Jedno rozwiązanie na pewno jest.

Lemat 7.2 (Układ jednorodny)**.** *Zbiór wszystkich rozwiązań równania*

$$A\vec{X} = \vec{0}$$

jest przestrzenią liniową, jest to $\ker(A)$*, gdy A traktujemy jako przekształcenie liniowe z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$. Wymiar tej przestrzeni to $n - \mathrm{rk}(A)$.*

Dowód. Wystarczy potraktować A jako przekształcenie liniowe. Wtedy zbiór rozwiązań to dokładnie jądro tego przekształcenia. □

7.4.2 Układy niejednorodne

Fakt 7.3.

$$A\vec{X} = \vec{B} \text{ ma rozwiązanie } \iff \vec{B} \in \mathrm{Im}(A) \ .$$

Jeśli równanie $A\vec{X} = \vec{B}$ ma rozwiązanie to zbiór wszystkich jego rozwiązań jest warstwą względem $\ker A$.

Uwaga. Jeśli ciało $\mathbb{F}$ jest nieskończone i $\ker A \neq \{\vec{0}\}$, tj. jest więcej niż jedno rozwiązanie, to jest „nieskończenie wiele rozwiązań". W innym przypadku jest to $|\mathbb{F}|^{\dim \ker A}$.

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli $\vec{X}_0$ jest rozwiązaniem, to $A\vec{X}_0 = \vec{B}$, czyli w szczególności $\vec{B} \in \mathrm{Im}(A)$.
$\Leftarrow$ Jeśli $\vec{B} \in \mathrm{Im}(A)$, to istnieje $\vec{X}_0$, że $A\vec{X}_0 = \vec{B}$.
Ustalmy dowolne rozwiązanie $\vec{X}_0$. Wtedy dla dowolnego $\vec{X}$:

$$A\vec{X} = \vec{B} \iff A\vec{X} = A\vec{X}_0 \iff A(\vec{X} - \vec{X}_0) = \vec{0} \iff \vec{X} - \vec{X}_0 \in \ker(A)$$
$$\iff \vec{X}, \vec{X}_0 \text{ są w tej samej warstwie względem } \ker(A) \ . \quad \square$$

Fakt 7.4 (Tw. Kronecker-Capelli)**.** *Układ*

$$A\vec{X} = \vec{B}$$

ma rozwiązanie $\iff \mathrm{rk}(A|\vec{B}) = \mathrm{rk}(A)$.

Macierz $[A|B]$ nazywana jest czasem *macierzą rozszerzoną* układu $A\vec{X} = \vec{B}$.

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli $\mathrm{rk}(A|\vec{B}) = \mathrm{rk}(A)$ to znaczy, że $\vec{B}$ jest kombinacją kolumn z A, czyli jest w obrazie A.
$\Leftarrow$ Jeśli $\mathrm{rk}(A|\vec{B}) > \mathrm{rk}(A)$ to $\vec{B}$ nie jest w obrazie A, czyli równanie nie ma rozwiązania. $\square$

Uwaga. Liczenie *osobno* rzędów $A|\vec{B}$ oraz A jest zwykle nadmiarowe: jeśli użyjemy eliminacji wierszowej, to automatycznie dostaniemy informację, jaki jest rząd A a jaki $A|\vec{B}$. W eliminacji kolumnowej również jest to prawda, o ile nie użyjemy $\vec{B}$ do eliminowania innych kolumn.

Co więcej, jeśli zastosujemy eliminację Gauβa na wierszach lub kolumnach A (otrzymując A') to po zastosowaniu tych samych operacji na $A|\vec{B}$ uzyskamy $A'|\vec{B}'$ (i $\vec{B}'$ trzeba osobno policzyć).

W obu wypadkach nie ma potrzeby wykonywania tych samych przekształceń wielokrotnie.

Przykład 7.5. Ile rozwiązań, w zależności od parametru λ, ma podany układ równań?

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & 1+\lambda \\ (6+\lambda^2)x_1 & -3x_2 & +(9-\lambda^2)x_3 & = & 3 \end{cases} .$$

Podany układ równań zapisany w postaci macierzowej wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6+\lambda^2) & -3 & (9-\lambda^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ 3 \end{bmatrix}$$

Jeśli wyznacznik macierzy głównej jest niezerowy, to ma on dokładnie jedno rozwiązanie. Policzmy więc wartość tego wyznacznika, użyjemy metody Sarrusa:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ (6+\lambda^2) & -3 & (9-\lambda^2) \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \\ (6+\lambda^2) & -3 \end{matrix} =$$

$$3\cdot(-2)\cdot(9-\lambda^2) + (-1)\cdot 6\cdot(6+\lambda^2) + 4\cdot 5\cdot(-3) - 4\cdot(-2)\cdot(6+\lambda^2) - 3\cdot 6\cdot(-3) - (-1)\cdot 5\cdot(9-\lambda^2) =$$
$$-54 + 6\lambda^2 - 36 - 6\lambda^2 - 60 + 48 + 8\lambda^2 + 54 + 45 - 5\lambda^2 =$$
$$-3 + 3\lambda^2 = 3(\lambda^2 - 1)$$

Zauważmy, że wartość wyznacznika głównego tego układu równań jest niezerowa dla $\lambda \notin \{1, -1\}$, czyli dla takich wartości układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozważmy więc pozostałe wartości. Zastosujemy w nich twierdzenie Kroneckera-Capellego: w tym celu musimy policzyć rząd macierzy głównej oraz rząd macierzy rozszerzonej tego układu. Rząd macierzy głównej jest taki sam dla $\lambda = 1$ oraz $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2),(2)-(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że ma ona rząd 2: wiersz drugi i trzeci są identyczne, zaś pierwszy i drugi różne (i mają tą samą drugą współrzędną).

Niech $\lambda = 1$, rozważamy macierz rozszerzoną, wykonujemy na niej takie same operacje, jak powyżej na macierzy głównej:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2),(2)-(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rząd tej macierzy również wynosi 2, gdyż, jak powyżej, wiersz drugi i trzeci są identyczne, zaś pierwszy i drugi: różne i mają taką samą drugą współrzędną. Czyli rząd macierzy głównej i macierzy rozszerzonej jest taki sam i z tw. Kroneckera-Capellego ten układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 6 & 0 \\ 7 & -3 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2),(2)-(1)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-(2)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)+\frac{1}{4}(3),(1)-\frac{1}{4}(3)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)-(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Łatwo zauważyć, że rząd wynosi 3. Czyli rząd macierzy głównej jest mniejszy niż rząd macierzy rozszerzonej i z tw. Kroneckera-Capellego ten układ równań nie ma rozwiązań.

Przykład/Zastosowanie 7.6. Rozważmy grę, rozgrywającą się na prostokątnej planszy $n \times m$. Na wejściu każde pole jest zapalone lub zgaszone. W pojedynczym ruchu możemy dotknąć konkretnego pola, co powoduje zmianę (tj. z zapalonego na zgaszone i odwrotnie) na tym polu i wszystkich polach sąsiadujących z nim bokami). Celem gry jest zapalenie wszystkich pól.

Gra taka była kiedyś dostępna jako gra pudełkowa, w której początkowe zapalenia były losowane, zaś zmiany zapaleń odbywały za pomocą okablowania elektrycznego.

Kolejność operacji nie ma znaczenia. Co więcej, dwukrotne dotknięcie pola równoważne jest brakowi dotknięcia. Napiszmy układ równań nad $\mathbb{Z}_2$: każdemu polu przypisujemy zmienną x_i, ponadto piszemy równania:

$$x_i + \sum_{j\text{: pola } i,j \text{ są sąsiednie}} x_j = \begin{cases} 1, & \text{jeśli początkowo pole } i \text{ było zgaszone} \\ 0, & \text{jeśli początkowo pole } i \text{ było zapalone} \end{cases}.$$

Równanie to ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy można zapalić każde pole na planszy.

Co więcej, w prostszym przypadku planszy jednowymiarowej podejście to prowadzi do prostego (prawie zachłannego) algorytmu rozwiązującego ten problem. (Zadanie)

7.5 Metoda eliminacji Gaussa

Definicja 7.7 (Układy równoważne)**.** Układy równań $A\vec{X} = \vec{B}$ oraz $A'\vec{X} = \vec{B}'$ są *równoważne*, jeśli mają ten sam zbiór rozwiązań.

Uwaga. Zauważmy, że równoważne układy równań muszą mieć tyle samo zmiennych, ale mogą mieć różną liczbę równań.

Jak to policzyć wydajnie?

Lemat 7.8. *Rozważmy układ równań $A\vec{X} = \vec{B}$. Układ uzyskany przez następujące operacje przeprowadzone na macierzy rozszerzonej układu:*

- *zamianę i-tego oraz j-tego równania*
- *dodanie do j-tego równania wielokrotności i-tego*
- *przemnożenie i-tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$*
- *usunięcie równania $0\vec{X} = 0$ (gdzie lewe 0 to zerowa macierz odpowiedniego rozmiaru, a prawe: liczba)*

dają układ równoważny wejściowemu.

Prosty dowód pozostawimy jako ćwiczenie.

Uwaga. Popularny sposób rozwiazywania równań „przez wstawianie" to odmiana eliminacji Gaußa.

Oznacza to, że możemy stosować metodę eliminacji (wierszowej) na równaniu. Na końcu dostajemy macierz w postaci schodkowej (wierszowo).

Wtedy

- Układ jest sprzeczny: Jeśli w wierszu z samymi współczynnikami zerowymi prawa strona jest niezerowa. Z tw. Kroneckera-Capelliego rząd (wierszowy) macierzy rozszerzonej jest większy, niż macierzy głównej.

  Intuicyjnie odpowiada to sytuacji, że mamy te same równania i różne wartości po prawej stronie. Nie ma nic więcej do zrobienia.

- Układ ma jedno rozwiązanie: Jeśli uzyskaliśmy macierz (równań) górnotrójkątną plus być może zerowe wiersze poniżej, ponadto na przekątnej nie ma zer oraz wartości odpowiadające wierszom zerowym to też zera, to jest dokładnie jedno rozwiązanie. Dowód wynika z tego, że możemy odrzucić zerowe równania (układ pozostaje równoważny) i wtedy mamy macierz kwadratową i możemy nałożyć macierz odwrotną (alternatywnie: macierz jest odwracalna, czyli ma trywialne jądro, czyli warstwa ma jeden element). W tym przypadku łatwo podać rozwiązanie (wyliczamy kolejne wartości i wstawiamy do równań powyżej).

- W przeciwnym przypadku, już wcześniej powiedzieliśmy, ile tych rozwiązań jest (warstwa jądra). Umiemy policzyć to jądro, chcemy jeszcze jedno rozwiązanie szczególne. W tym celu możemy ustalić (dowolnie) wartość zmiennej, która nie odpowiada pierwszej wyróżnionej pozycji w wierszu. To przekształci macierz równania do postaci trójkątnej (pierwszy przypadek).

Przykład 7.9 (Kontynuacja Przykładu 7.5). Przypomnijmy, że chcemy sprawdzić, ile rozwiązań, w zależności od parametru λ, ma układ:

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & -2x_2 & +6x_3 & = & 1+\lambda \\ (6+\lambda^2)x_1 & -3x_2 & +(9-\lambda^2)x_3 & = & 3 \end{cases}.$$

Użyjemy tym razem eliminacji Gaußa: od trzeciego wiersza odejmujemy drugi, a od drugiego: pierwszy.

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & \lambda \\ (1+\lambda^2)x_1 & -x_2 & +(3-\lambda^2)x_3 & = & 2-\lambda \end{cases}.$$

Teraz od trzeciego odejmujemy drugi:

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1+\lambda \\ (\lambda^2-1)x_1 & & +(1-\lambda^2)x_3 & = & 2(1-\lambda) \end{cases}.$$

Łatwo zauważyć, że dla $\lambda = -1$ trzecie równanie jest sprzeczne ($0 = 4$), zaś dla $\lambda = 1$ jest puste ($0 = 0$).

Rozważmy dokładniej przypadek $\lambda = 1$.

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

Łatwo zauważyć, że rząd macierzy głównej wynosi 2, dlatego jądro ma wymiar 1. Czyli jest nieskończenie wiele rozwiązań.

Dla $\lambda \notin \{-1, 1\}$ dzielimy trzecie równanie przez $1 - \lambda$:

$$\begin{cases} 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1+\lambda \\ -(\lambda+1)x_1 & & +(1+\lambda)x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

Tu już łatwo sprawdzić, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie (np. licząc wyznacznik), ale można też dalej eliminacją Gaußa: od pierwszego równania odejmujemy drugie:

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & -\lambda \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 1+\lambda \\ -(\lambda+1)x_1 & & +(1+\lambda)x_3 & = & 2 \end{cases}.$$

Następnie od drugiego 2 razy pierwszy, do trzeciego dodajemy $1 + \lambda$ razy pierwszy:

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & -\lambda \\ & -x_2 & -2x_3 & = & 1+3\lambda \\ & & 3(1+\lambda)x_3 & = & 2-\lambda(1+\lambda) \end{cases}.$$

Z czego wnioskujemy, że równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozdział 8

Wartości własne

8.1 Wartość własna, wektor własny

Definicja 8.1 (Wartość własna, wektor własny)**.** λ jest *wartością własną* macierzy M (dla wektora $\vec{V} \neq 0$), gdy $M\vec{V} = \lambda\vec{V}$. $\vec{V}$ jest *wektorem własnym* tej macierzy.

λ jest *wartością własną* przekształcenia liniowego F, jeśli $F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ dla pewnego $\vec{v} \neq \vec{0}$. Taki wektor $\vec{v}$ jest *wektorem własnym* F (dla wartości własnej λ).

Fakt 8.2. *λ jest wartością własną przekształcenia F wtedy i tylko wtedy gdy λ jest wartością własną $M_{BB}(F)$, dla dowolnej bazy B.*

$\vec{v}$ jest wektorem własnym F dla wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy $[\vec{v}]_B$ jest wektorem własnym macierzy $M_{BB}(F)$ dla wartości własnej λ, dla dowolnej bazy B.

Dowód. $\Rightarrow$ Zauważmy, że

$$[F(\vec{v})]_B = M_{BB}(F)[\vec{v}]_B \ .$$

Jeśli $\vec{v}$ jest wektorem własnym F dla λ, to

$$[F(\vec{v})]_B = [\lambda v]_B = \lambda[\vec{v}]_B$$

i tym samym

$$M_{BB}(F)[\vec{v}]_B = \lambda[\vec{v}]_B \ ,$$

czyli $[v]_B$ jest wektorem własnym dla wartości λ dla $M_{BB}(F)$.

$\Leftarrow$ Analogicznie, jeśli $[\vec{v}]_B$ jest wektorem własnym dla wartości λ dla $M_{BB}(F)$ to

$$M_{BB}(F)[\vec{v}]_B = \lambda[\vec{v}]_B$$

czyli

$$[F(\vec{v})]_B = \lambda[\vec{v}]_B,$$

tzn.

$$F(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \ . \quad \square$$

Przykład 8.3. Przypomnijmy Przykład 5.11 i macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \ .$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Nie jest to zaskakujące: wiemy, że można przedstawić ją w postaci

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} .$$

Co oznacza, że odpowiadające przekształcenie liniowe ma w bazie $\left[1,1,0\right]^T; \left[1,0,1\right]^T; \left[0,1,1\right]^T$ macierz $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. No i wiemy już, że wartości własne przekształcenia nie zależą od wyboru bazy.

Wartości własne nie zawsze istnieją.

Przykład 8.4. Obrót $\mathbb{R}^2$ o kąt 90^0 (w lewo). Jego macierz wygląda następująco

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Geometrycznie „widać", że przekształcenie to nie ma wektorów własnych, czyli nie ma też ich jego macierz.

Z drugiej strony, jeśli potraktujemy ją jako macierz nad $\mathbb{C}$, to wtedy

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Czyli ma (zespolone) wartości własne i oraz $-i$.

8.2 Macierze podobne

Przedstawienie macierzy M w postaci $A^{-1}NA$ gdzie A to macierz zmiany bazy ma dla nas na razie sens tylko w przypadku przekształceń liniowych. Ale ta własność jest użyteczna również bez rozważania konkretnych baz i zmian baz.

Definicja 8.5 (Macierze podobne)**.** Macierze kwadratowe M, M' są *podobne*, jeśli istnieje macierz odwracalna A, taka że

$$M' = A^{-1}MA \ .$$

Oznaczamy to jako $M \sim M'$.

Lemat 8.6. *Rozpatrzmy macierz odwracalną $A = [A_1|A_2|\cdots|A_n]$. Jest to macierz zmiany bazy między bazą $B = \vec{A_1}, \ldots, \vec{A_n}$ oraz bazą standardową E:*

$$A = M_{BE} \ .$$

W szczególności, dla macierzy kwadratowej M oraz jej macierzy podobnej $M' = A^{-1}MA$ mamy

$$M' = M_{EB}MM_{BE} \ .$$

Oznacza to, że dla przekształcenia liniowego F_M indukowanego przez M macierz M' jest macierzą tego przekształcenia w bazie B.

$$M' = M_{EB}(M_{EE}(F_M))M_{BE} = M_{BB}(F_M) \ .$$

Dowód. Niech E: baza standardowa. Przypomnijmy, że dla bazy $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ oraz bazy B' mamy

$$M_{BB'} = [(\vec{v}_1)_{B'}|\cdots|(\vec{v}_n)_{B'}]$$

W naszym przypadku

$$M_{BE} = [\vec{A}_1|\cdots|\vec{A}_n] \ .$$

Reszta to proste rachunki. □

Fakt 8.7. *Macierze podobne mają te same wartości własne.*

Dowód. Jeśli X jest wektorem własnym M dla wartości λ, to dla $M' = A^{-1}MA$ wektor $A^{-1}X$ jest wektorem własnym dla wartości λ. □

8.3 Wielomian charakterystyczny

Lemat 8.8. *λ jest wartością własną macierzy M* $\iff$ $\det(M - \lambda \operatorname{Id}) = 0$

Dowód.

$$\lambda \text{ jest wartością własną } M \iff \exists \vec{V} \neq \vec{0}\ M\vec{V} = \lambda\vec{V} \iff \exists \vec{V} \neq \vec{0}(M - \lambda \operatorname{Id})\vec{V} = \vec{0} \iff$$
$$\ker(M - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{\vec{0}\} \iff \det(M - \lambda \operatorname{Id}) = 0\ . \quad \square$$

Definicja 8.9 (Wielomian charakterystyczny)**.** *Wielomian charakterystyczny* macierzy kwadratowej to:

$$\varphi_M(x) = \det(A - x \operatorname{Id})\ .$$

Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego $F : V \to V$ to

$$\varphi_F(x) = \det(M_{BB}(F) - x \operatorname{Id})\ ,$$

dla dowolnej bazy B przestrzeni $\mathbb{V}$.

Lemat 8.10. *Wielomian charakterystyczny dla macierzy $n \times n$ jest wielomianem stopnia n.*
λ jest wartością własną macierzy M wtedy i tylko wtedy gdy jest pierwiastkiem φ_M.

Dowód. Pokażemy przez indukcję trochę silniejszą tezę: dla macierzy, w której w każdym wierszu i kolumnie najwyżej jeden element zależy liniowo od parametru x wyznacznik jest wielomianem stopnia najwyżej n. Jeśli w każdym wierszu i kolumnie jest taki wyraz, to wielomian jest stopnia dokładnie n.

Dowód to prosta indukcja względem rozwinięcia Laplace'a.

W drugiej części zauważmy, że $\varphi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \operatorname{Id})$ jest dokładnie wartością z Lematu 8.8. $\square$

Lemat 8.11. *Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego jest dobrze zdefiniowany.*

Dowód. Chcemy pokazać, że

$$\det(M_{BB}(F) - x \operatorname{Id}) = \det(M_{B'B'}(F) - x \operatorname{Id})\ ,$$

dla dwóch dowolnych baz B, B'.

Policzmy

$$\begin{aligned}\det(M_{BB}(F) - x \operatorname{Id}) &= \det(M_{BB'}(M_{BB}(F) - x \operatorname{Id})M_{B'B}) \\ &= \det(M_{BB'}(M_{BB}(F))M_{B'B} + M_{BB'}(-x \operatorname{Id})M_{B'B}) \\ &= \det(M_{B'B'}(F) - xM_{BB'} \operatorname{Id} M_{B'B}) \\ &= \det(M_{B'B'}(F) - x \operatorname{Id})\end{aligned}$$

$\square$

Przykład 8.12 (Kontynuacja Przykładu 8.4). Przypomnijmy, że obrót $\mathbb{R}^2$ o kąt 90^0 (w lewo) ma macierz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny tej macierzy to

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Wielomian $\lambda^2 + 1$ nie ma pierwiastków rzeczywistych; ma pierwiastki zespolone: $i, -i$.

Rozwiązując układ równań (nad liczbami zespolonymi)

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

otrzymujemy wektor własny dla wartości własnej i. Analogicznie dla $-i$.

Przykład 8.13 (Kontynuacje Przykładu 8.3). Obliczmy wartości własne macierzy

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

W tym celu obliczmy wyznacznik:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 5-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} && \text{Rozwinięcie Laplace'a} \\ &= (4-\lambda)((5-\lambda)^2-1) \\ &= (4-\lambda)^2(6-\lambda) \end{aligned}$$

Czyli wartościami własnymi są 4, 6. Wektory własne obliczamy rozwiązując odpowiednie układy równań.

8.4 Krotności: algebraiczna i geometryczna.

Lemat 8.14. *Jeśli λ jest wartością własną dla M, to zbiór wektorów własnych (wraz z wektorem $\vec{0}$) dla M to* $\ker(M-\lambda\,\mathrm{Id})$. *W szczególności jest to przestrzeń liniowa.*

Uwaga. Formalnie wektor $\vec{0}$ nie jest wektorem własnym, ale wygodniej jest go zaliczyć tu do wektorów własnych, żeby wyszła podprzestrzeń.

Oznaczenie: dla ustalonej macierzy M oznaczamy

$$\mathbb{V}_\lambda = \{\vec{V} \,:\, M\vec{V} = \lambda\vec{V}\}\ .$$

Analogicznie dla przekształceń liniowych.

Tym samym, aby obliczyć wektory własne należy najpierw policzyć wielomian charakterystyczny, jego pierwiastki i dla ustalonego pierwiastka λ policzyć $\ker(M-\lambda\,\mathrm{Id})$. Można też oczywiście bezpośrednio próbować rozwiązać równanie

$$M\vec{X} = \lambda\vec{X}$$

w zmiennych $x_1, \ldots, x_n$.

Definicja 8.15 (Krotność algebraiczna, krotność geometryczna)**.** Dla wartości własnej λ *krotność geometryczna* to wymiar przestrzeni wektorów własnych dla λ, zaś *krotność algebraiczna* to krotność pierwiastka λ w wielomianie charakterystycznym.

Fakt 8.16. *Krotność geometryczna λ dla M to wymiar* $\ker(M-\lambda\,\mathrm{Id})$.

Lemat 8.17. *Jeśli $A \sim B$ to krotność geometryczna λ dla A, B jest taka sama. Analogicznie krotność algebraiczna.*

Lemat 8.18. *Krotność algebraiczna jest większa równa krotności geometrycznej.*

Dowód. Niech krotność geometryczna to k. Istnieje więc k niezależnych wektorów własnych $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ dla wartości własnej λ. Popatrzmy na przekształcenie liniowe F indukowane przez macierz M oraz na dowolną bazę B zawierającą $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$. Wtedy $M_{BB}(F)$ jest podobna do M oraz jest postaci $\begin{bmatrix} \lambda\,\mathrm{Id}_k & M'' \\ 0 & M' \end{bmatrix}$. W szczególności wielomian charakterystyczny tej macierzy to

$$\begin{aligned} \left|\begin{bmatrix} \lambda\,\mathrm{Id}_k & M'' \\ 0 & M' \end{bmatrix} - x\,\mathrm{Id}_n\right| &= \left|\begin{bmatrix} \lambda\,\mathrm{Id}_k - x\,\mathrm{Id}_k & M'' \\ 0 & M' - x\,\mathrm{Id}_{n-k} \end{bmatrix}\right| \\ &= |(\lambda-x)\,\mathrm{Id}_k\,| \cdot |M' - x\,\mathrm{Id}_{n-k}\,| \\ &= (\lambda-x)^k \cdot |M' - x\,\mathrm{Id}_{n-k}\,|. \end{aligned}$$

Zawiera on $(\lambda-x)^k$, czyli λ jest k-krotnym pierwiastkiem, czyli krotność algebraiczna to przynajmniej k. □

Uwaga. Jeśli krotność algebraiczna wynosi 1, to geometryczna też wynosi 1:

- krotność geometryczna wynosi najwyżej 1 (bo jest $\leq$ niż krotność algebraiczna)
- krotność geometryczna wynosi przynajmniej 1, bo $\det(M - \lambda \operatorname{Id}) = 0$, czyli λ jet wartością własną.

Przykład 8.19. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ma dwie wartości własne: 1 oraz 2. Krotność algebraiczna 2 to 2, ale geometryczna to 1: macierz $M - 2\operatorname{Id} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ma rząd 2, więc wymiar jej jądra = wymiar przestrzeni wektorów własnych dla 2 to 1.

Przykład 8.20. Przypomnijmy Przykład 5.11 i macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Ta macierz ma dwie wartości własne: 6, wymiar przestrzeni $\mathbb{V}_6$ to 1 (rozpięta przez wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$); oraz 4, wymiar przestrzeni $\mathbb{V}_4$ to 2 (niezależne wektory własne to np. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Definicja 8.21 (Przestrzeń niezmiennicza)**.** Podprzestrzeń $\mathbb{V}' \leq \mathbb{V}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ jest *przestrzenią niezmienniczą* dla $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, jeśli $F(\mathbb{V}') \subseteq \mathbb{V}'$.

8.5 Macierze diagonalizowalne, przekształcenia diagonalne

Definicja 8.22 (Macierz diagonalizowalna)**.** Macierz M jest *diagonalizowalna* $\iff$ jest podobna do macierz przekątniowej.

Przekształcenie liniowe jest *diagonalne*, jeśli jego macierz (w jakiejś bazie) jest diagonalizowalna.

Lemat 8.23. *Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy M. Wtedy suma (mnogościowa) baz przestrzeni $\mathbb{V}_{\lambda_1}, \ldots, \mathbb{V}_{\lambda_n}$ jest zbiorem liniowo niezależnym.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 8.24. *Następujące warunki są równoważne dla macierzy kwadratowej M rozmiaru $n \times n$:*

1. *M jest diagonalizowalna*
2. *M ma n niezależnych wektorów własnych*
3. *Suma wymiarów przestrzeni wartości własnych $\mathbb{V}_\lambda$ macierzy M wynosi n.*

Analogiczne twierdzenie zachodzi też dla przekształceń liniowych.

Dowód. $1 \Rightarrow 2$ Skoro M jest diagonalizowalna, to istnieje A, A^{-1} oraz macierz przekątniowa D takie że

$$M = A^{-1} D A \ .$$

Oczywiście D ma n niezależnych wektorów własnych (konkretnie: $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_n$) i w takim razie, analogicznie jak w Fakcie 8.7, wnioskujemy, że $A^{-1}\vec{E}_1, \ldots, A^{-1}\vec{E}_n$ są wektorami własnymi M dla odpowiadających wartości własnych. Łatwo sprawdzić, że są to po prostu kolumny A^{-1}.

$2 \Rightarrow 3$ Niech $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ to niezależne wektory własne M. Dla ustalonego λ, niech n_λ to liczba wektorów z $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$, które są wektorami własnymi dla λ. Są one niezależne w $\mathbb{V}_\lambda$, czyli $\dim \mathbb{V}_\lambda \geq n_\lambda$ i

$$\sum_\lambda \dim \mathbb{V}_\lambda \geq \sum_\lambda n_\lambda = n$$

Jednocześnie z Lematu 8.23

$$\sum_\lambda \dim \mathbb{V}_\lambda \leq n$$

bo suma baz przestrzeni $\mathbb{V}_\lambda$ jest zbiorem liniowo niezależnym (zadanie na ćwiczeniach), czyli ma wielkość najwyżej n.

$3 \Rightarrow 1$ Rozważmy bazy poszczególnych przestrzeni $\mathbb{V}_\lambda$, niech w sumie dają one układ $A_1, \ldots, A_n$. Z Lematu 8.23 ten układ jest liniowo niezależny, czyli jest bazą. Zdefiniujmy $A^{-1} = [A_1|\cdots|A_n]$. Łatwo sprawdzić, jak w Fakcie 8.7, że

$$M = A^{-1}DA$$

gdzie D jest macierzą diagonalną mającą na pozycji ii wartość własną dla wektora A_i. □

8.6 Macierz Jordana

Zajmiemy się obecnie problemem, jak bardzo macierz może nie być diagonalizowalna i jak bardzo mogą się różnić krotności geometryczna i algebraiczna. Zauważmy, że w przypadku liczb zespolonych każdy wielomian ma pierwiastek, w szczególności wielomian charakterystyczny każdej macierzy ma pierwiastek, czyli każda macierz zespolona ma wektor własny.

Definicja 8.25 (Klatka Jordana, macierz Jordana)**.** *Klatką Jordana* nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Macierzą Jordana nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

gdzie $J_1, J_2, \ldots, J_k$ są klatkami Jordana.

Ważne $\lambda \in \mathbb{C}$, tj. może być liczbą zespoloną.

Fakt 8.26. *Klatka Jordana J rozmiaru $k \times k$ ma jedną wartość własną: λ, o krotności algebraicznej k oraz geometrycznej* 1.

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie. Jest to w pewnym sensie najgorszy przypadek, jeśli chodzi o wartości własne.

Twierdzenie 8.27 (Rozkład Jordana)**.** *Każdą macierz M o wartościach w $\mathbb{C}$ można przedstawić w postaci*

$$M = A^{-1}JA$$

gdzie J jest macierzą Jordana a A jest macierzą odwracalną (o wartościach w $\mathbb{C}$).

Uwaga: różne klatki mogą być dla tej samej wartości λ.

Przykład/Zastosowanie 8.28. Przypomnijmy sobie macierz odpowiadającą rekurencji na liczby Fibonacciego.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Policzmy jej wielomian charakterystyczny:

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 .$$

Zauważmy, że jest to ten sam wielomian, który otrzymaliśmy przy próbie znalezienia ciągów geometrycznych spełniających równanie rekurencyjne.

Pierwiastki to $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$. Czyli macierz jest postaci

$$A^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{bmatrix} A .$$

n-ta potęga tej macierzy to

$$A^{-1} \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n \end{bmatrix} A .$$

To w szczególności mówi nam, jak wygląda wyraz ogólny: jest postaci $a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + b\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$, dla odpowiednich wartości a, b. Ponownie, jest to analogiczny wynik, jak w przypadku wcześniejszej metody.

Zauważmy też, że A oraz A^{-1} można łatwo policzyć: niech $\vec{C}_1$ to wektor własny dla $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ zaś $\vec{C}_2$ dla $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ i niech C oznacza bazę złożoną z tych dwóch wektorów, zaś E: bazę standardową. Wtedy $A = M_{EC}$ i $A^{-1} = M_{CE}$, czyli $A^{-1} = [\vec{C}_1|\vec{C}_2]$.

Używając macierzy Jordana możemy podać rozwiązanie ogólne dla każdej zależności tej postaci (tzn. rekurencji liniowej).

8.7 Macierze symetryczne

Definicja 8.29 (Macierz symetryczna)**.** Macierz jest *symetryczna*, jeśli $M = M^T$.

Twierdzenie 8.30. *Macierz symetryczna z $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ma n niezależnych wektorów własnych (nad $\mathbb{R}$).*

Dość techniczny i żmudny dowód na razie pominiemy.

8.8 Eigenfaces raz jeszcze, PCA

Wracamy do omawianego już problemu algorytmu Eigenfaces z Przykładu 2.19.

Najpierw musimy trochę bardziej sformalizować problem. Na wejściu otrzymujemy kolekcję (m) zdjęć twarzy ludzi (dla ułatwienia: w odcieniach szarości — pewien skończony zakres) i ustalonej wielkości (powiedzmy 256×256). Traktujemy je jako wektory wymiaru $n = 256 \cdot 256$ z $\mathbb{R}^n$. Wszystkie razem traktujemy jako macierz M wymiaru $n \times m$. Obrazy są uśrednione, tzn. dla każdego wektora zakładamy, że $\sum_i v_i = 0$. Jest to częsta praktyka służąca eliminacji systemowych wypaczeń (nierówne oświetlenie itp.)

Problem traktujemy ogólnie, tj. mamy daną macierz $n \times m$ i chcemy znaleźć nowe, lepsze współrzędne. Przy czym intuicyjnie chcemy wybrać tak, by współrzędne były coraz mniej ważne (i docelowo odrzucimy wszystko poza ilomaś początkowymi). Poniżej opiszemy pokrótce algorytm PCA (prime component analysis), Eigenfaces jest jego zastosowaniem.

Dla wprawy: gdybyśmy chcieli wybrać tylko jeden kierunek $\vec{V}$, i zastąpić każdy wektor $\vec{V}_i$ rzutem prostopadłym $\vec{V}_i'$ na kierunek $\vec{V}$. Dobrze wybrać taki, który najbardziej zmierzy „zmienność".

Algorytmy Machine Learningu zwykle mają intuicję pochodzącą ze statystyki a miarą „zmienności" w statystyce jest kowariancja. Dla ustalonego $\vec{V}$ suma kowariancji wszystkich rzutów wszystkich wektorów to

$$\vec{V}^T M M^T \vec{V}$$

(dla $\vec{V}$ dobranego tak, że ma długość 1). Dowód pominiemy, ale jest standardowy (korzystamy z tego, że średnia każdego wektora to 0), jeszcze do niego później wrócimy.

Naszym celem jest znalezienie $\vec{V}$ (o długości 1), który to maksymalizuje.

Zauważmy, że MM^T jest macierzą symetryczną wymiaru $n \times n$. Skoro jest symetryczna ma bazę $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ wektorów własnych (dla rzeczywistych wartości własnych). To wymaga jeszcze trochę dowodu, ale żeby to zmaksymalizować, trzeba wziąć wektor $\vec{V}$ będący wektorem własnym dla największej wartości własnej (ten dowód pokażemy jeszcze później).

Rozdział 9

PageRank

Na podstawie pracy Kurt Bryan i Tanya Leise „The $25,000,000,000 eigenvector. The linear algebra behind Google." *SIAM Review*, 48:3 (2006) 569–581.

9.1 Macierze sąsiedztwa, ranking

Modelujemy internet jako graf: zbiór wierzchołków to strony, (skierowane) krawędzie to linki miedzy nimi (krawędź z i do j oznacza, że jest link ze strony i do j). Naszym celem jest skonstruowanie rankingu, tj. przypisanie każdej stronie jej "ważności" w sieci. Chcemy to robić na podstawie linków, każdemu przypisujemy sumę głosów 1. Zakładamy, że graf nie ma „pętli", tzn. krawędzi z i do i.

Definicja 9.1 (Znormalizowana macierz sąsiedztwa)**.** Dla grafu G o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$ niech $d_{i,j}$ oznacza liczbę krawędzi z j do i (może to być 0), zaś m_j liczbę krawędzi wychodzących z j $(= \sum_i d_{i,j})$.

Znormalizowana macierz sąsiedztwa $M(G)$ to macierz $(m_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$, gdzie

$$m_{i,j} = \frac{d_{i,j}}{m_j} \ .$$

Zauważmy, że liczby w kolumnie są nieujemne i jeśli istnieje choć jedna krawędź, to sumują się do 1. W dalszej części będziemy się zajmować grafami, które nie mają wierzchołków bez krawędzi wychodzących. Odpowiadającą macierz nazywamy *macierzą stochastyczną*.

Definicja 9.2 (Macierz stochastyczna, wektor stochastyczny)**.** Wektor jest *stochastyczny*, jeśli jego współrzędne są nieujemne i sumują się do 1.

Macierz kwadratowa M jest *(kolumnowo) stochastyczna*, jeśli każda jej kolumna jest wektorem stochastycznym.

Fakt 9.3. *Iloczyn dwóch macierzy stochastycznych jest macierzą stochastyczną.*

Jeśli $M_1, \ldots, M_k$ *są macierzami stochastycznymi oraz* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *są liczbami nieujemnymi, spełniającymi* $\sum_i \alpha_i = 1$*, to*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i$$

też jest macierzą stochastyczną.

Prosty dowód pozostawiamy na ćwiczenia.

Potęgi znormalizowanej macierzy sąsiedztwa mają naturalną interpretację: wyraz i, j macierzy M^k jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka długości k w grafie sąsiedztwa z j do i. To stwierdzenie ma dokładniejszą, ilościową wersję:

Lemat 9.4. *Niech* M *będzie znormalizowaną macierzą sąsiedztwa zaś* $\vec{V}$ *wektorem stochastycznym. Wtedy* $M^k\vec{V}$ *to rozkład prawdopodobieństwa procesu losowego:*

krok 0 *W kroku* 0 *losujemy wierzchołek początkowy wg. rozkładu wyznaczonego przez* $\vec{V}$*, tj. wierzchołek* i *jest wylosowany z prawdopodobieństwem* v_i*.*

krok k *W każdym kolejnym kroku, jeśli jesteśmy w wierzchołku* v*, wybieramy z takim samym prawdopodobieństwem jedną z krawędzi wychodzących z* v*.*

Dowód. Dla $k = 0$ poprawność wynika wprost z definicji: skoro losujemy wg. prawdopodobieństwa zadanego przez $\vec{V} = M^0\vec{V}$.

Zauważmy, że wystarczy pokazać dowód dla $k = 1$, bo reszta wynika wprost z indukcji:

$$M^{k+1}\vec{V} = M(M^k\vec{V})$$

i możemy teraz potraktować $M^k\vec{V}$ jako wektor rozkładu prawdopodobieństwa po k krokach.

Dla $k = 1$: prawdopodobieństwo znalezienia się w i: należy zsumować po wszystkich j prawdopodobieństwo, że byliśmy w j (czyli v_j) i przeszliśmy z j do i ($m_{i,j}$):

$$\sum_j m_{i,j}v_j$$

ale to jest dokładnie i-ta współrzędna $M\vec{V}$. □

Definicja 9.5. *Ranking* dla macierzy stochastycznej M to wektor $\vec{R}$, taki, że $M\vec{R} = \vec{R}$ oraz $\sum_i r_i = 1$.

Rankingiem wierzchołka grafu jest odpowiadająca współrzędna tego wektora.

Innymi słowy, jest to wektor własny dla wartości 1.

Uwaga. Ranking to „stabilny" rozkład prawdopodobieństwa, w tym sensie, że odpowiada prawdopodobieństwu znalezienia się w danym wierzchołku po dużej liczbie kroków (ta intuicja niestety jest zawodna z paru powodów).

Uwaga. Zauważmy, że zamiast $\sum_i r_i = 1$ moglibyśmy wziąć dowolną inną niezerową liczbę, ale dla 1 to daje ładną interpretację probabilistyczną.

Chcielibyśmy, żeby ranking istniał, był jedyny oraz był nieujemny (i żeby można go było łatwo policzyć).

Lemat 9.6 (Istnienie rankingu)**.** *Macierz stochastyczna ma wartość własną* 1*.*

Dowód. Wiemy, że macierz M i M^T mają te same wartości własne. Popatrzmy więc na macierz M^T. Łatwo sprawdzić, że wektor $[1, 1, \ldots, 1]^T$ składający się z samych jedynej jest wektorem własnym dla wartości 1: i-ty element w $M^T[1, 1, \ldots, 1]^T = ([1, 1, \ldots, 1]M)^T$ to

$$\sum_j m_{j,i} \cdot 1 = \sum_j m_{j,i} = 1 \ .$$ □

Fakt 9.7. *Jeśli w grafie, który nie ma wierzchołków bez wychodzących krawędzi, istnieją dwa różne podzbiory wierzchołków, z których nie ma krawędzi wychodzących poza ten zbiór, to ranking nie jest jedyny.*

Uwaga. W praktyce, graf internetu nie był spójny (teraz być może już jest).

Poza tym wiszące wierzchołki są problemem.

Dowód. W języku wartości własnych: $\dim \mathbb{V}_1 > 1$.

Niech te dwa zbiory to U, U', tj. nie mają one krawędzi wychodzących (poza U, U'); zauważmy, że mogą być jeszcze inne wierzchołki! Czyli wszystkie krawędzie U (U') prowadzą do U (U').

Niech M_U oznacza znormalizowaną macierz sąsiedztwa ograniczoną do wierszy oraz kolumn z U. Ta macierz jest stochastyczna: dla $j \in U$ wszystkie krawędzie wychodzące prowadzą do U, czyli

$$1 = \sum_i m_{i,j} = 1 = \sum_{i \in U} m_{i,j} \ .$$

Macierz ta ma wektor własny $\vec{V}_U$ dla wartości własnej 1. Rozszerzamy ten wektor do wektora o n elementach, uzupełniając 0, t. że $\vec{V}_u$ to obcięcie $\vec{V}$ do współrzędnych z U. Wtedy

$$M\vec{V} = \vec{V}$$

i tak zdefiniowany wektor jest wektorem własnym M dla macierzy M.

Analogicznie możemy zdefiniować $\vec{V}'$ poprzez wektor $\vec{V}_{U'}$, co daje tezę, bo $\vec{V}, \vec{V}'$ są niezależne. □

9.2 Macierze dodatnie, PageRank

Aby zapewnić te warunki, zajmiemy się inną macierzą: dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M rozmiaru $n \times n$ oraz liczby $0 < m < 1$ definiujemy

$$M' = (1-m)M + m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Dla odpowiedniej wartości m ranking tej macierzy to PageRank.

Fakt 9.8. *Macierz M' jest macierzą stochastyczną.*

Uwaga. Macierz ta ma naturalną interpretację jako proces losowy: w każdym kroku z prawdopodobieństwem $1-m$ losujemy krawędź wychodzącą, zaś z prawdopodobieństwem m losujemy jednorodnie jeden ze wszystkich wierzchołków.

Uwaga. Poniższe definicje oraz dowody dla macierzy dodatnich są prostszym wariantem ogólniejszego twierdzenia Frobeniusa-Perrona i jego dowodu.

Definicja 9.9. Mówimy, że macierz A jest *dodatnia*, co zapisujemy $A > 0$, jeśli wszystkie jej elementy są dodatnie.

Lemat 9.10. *Jeśli $A > 0$ i jest kolumnowo stochastyczna oraz $A\vec{V} = \vec{V}$ to $\vec{V} > 0$ lub $\vec{V} < 0$.*

Dowód. Załóżmy, że $\vec{V}$ ma współrzędne różnych znaków. Wtedy

$$\sum_i |v_i| > \left| \sum_i v_i \right| \quad . \tag{9.1}$$

Skoro $\vec{V} = A\vec{V}$ to

$$v_i = \sum_j a_{i,j} v_j \quad .$$

Zgodnie z wcześniejszą obserwacją (9.1) mamy

$$\begin{aligned} |v_i| &= \left| \sum_j a_{i,j} v_j \right| \\ &< \sum_j a_{i,j} |v_j| \end{aligned}$$

Sumując po i

$$\begin{aligned} \sum_i |v_i| &< \sum_i \sum_j a_{i,j} |v_j| \\ &= \sum_j |v_j| \underbrace{\sum_i a_{i,j}}_{\text{kolumna stochastyczna}} \\ &= \sum_j |v_j| \quad . \end{aligned}$$

Sprzeczność.

Pozostaje sprawdzić, że nie ma współrzędnej zerowej. Ale w sumie

$$v_i = \sum_j a_{i,j} v_j$$

wszystkie $a_{i,j}$ są dodatnie. Jeśli choć jeden v_j jest dodatni, to również v_i jest. A nie mogą być wszystkie zerowe (bo wtedy cały wektor $\vec{V}$ jest zerowy.) □

Lemat 9.11. *Dla dwóch niezależnych wektorów $\vec{S}, \vec{T} \in \mathbb{R}^n$ istnieje ich kombinacja liniowa, która ma pozycje różnych znaków.*

Dowód. Jeśli któryś z $\vec{S}, \vec{T}$ ma pozycje mieszanych znaków, to teza trywialnie zachodzi. W dalszej części zakładamy więc, że $\vec{S}, \vec{T} > 0$.

Nazwijmy składowe $\vec{S}$ i $\vec{T}$ przez $s_1, \ldots, s_n$ oraz $t_1, \ldots, t_n$. Jeśli dla którejś współrzędnej mamy $s_i = t_i = 0$, to usuwamy ją z obu wektorów; zauważmy, że musiały nam zostać przynajmniej dwie współrzędne. Oznaczmy $\alpha_i = \frac{s_i}{t_i}$, jeśli $t_i = 0$, to $\alpha_i = +\infty$. Zauważmy, że nie mogą być wszystkie równe:

- jako że $\vec{T}$ jest niezerowy, to któreś z $t_i \neq 0$, czyli nie jest tak że wszystkie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ to $+\infty$
- jeśli mamy $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, to wtedy $\vec{S} = \alpha_1 \vec{T}$, co przeczy ich niezależności

Weźmy teraz $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, takie że istnieją α_i, α_j spełniające $\alpha_i < \alpha < \alpha_j$. Wtedy $\vec{S} - \alpha\vec{T}$ ma na współrzędnej i liczbę ujemną, a na j: dodatnią. □

Twierdzenie 9.12. *Dla stochastycznej macierzy dodatniej A mamy* $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

Dowód. Wiemy z Lematu 9.6, że $\dim \mathbb{V}_1 \geq 1$. Załóżmy więc, że wynosi przynajmniej 2. Wtedy istnieją $\vec{S}, \vec{T} \in \mathbb{V}_1$. Ale w takim razie z Lematu 9.11 istnieje $\vec{W} \in \mathbb{V}_1$, który ma zarówno dodatnie jak i ujemne współrzędne. Ale to jest sprzeczność z Lematu 9.10. □

9.3 Obliczanie rankingu

Pozostaje powiedzieć, jak można policzyć ranking dla macierzy stochastycznej dodatniej.

Niech A będzie dodatnią macierzą kolumnowo stochastyczną.

9.3.1 Układ równań

Najprostsza obserwacja, to że skoro wymiar $\dim \mathbb{V}_1 = 1$,

Fakt 9.13. *Niech $A > 0$ będzie macierzą kolumnowo stochastyczną. Układ równań*

$$\begin{cases} (A - \mathrm{Id})\vec{X} &= 0 \\ \sum_i x_i &= 1 \end{cases} .$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Zbiór rozwiązań równania $(A - \mathrm{Id})\vec{X} = 0$ ma wymiar 1, (pokazaliśmy już, że taka jest krotność geometryczna wartośc własnej 1) łatwo sprawdzić, że dokładnie jeden z tych wektorów spełnia dodatkowy warunek $\sum_i x_i = 1$: weźmy dowolne $\vec{V}$ spełniające pierwsze równanie, wszystkie inne są postaci $\alpha\vec{V}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i mają one wtedy sumę współrzędnych $\alpha\,(\sum_i v_i)$. Widać, że dla dokładnie jednego α $(= 1/\sum_i v_i)$ ta suma wynosi 1. □

Ten układ można więc rozwiązać problematyczny jednak jest jego rozmiar.

9.3.2 Metoda iteracyjna.

Alternatywnie, chcemy pokazać, że można to policzyć jako granicę $(M')^k\vec{V}$ (dla sensownie wybranego $\vec{V}$).

Weźmy dowolny wektor $\vec{V} > 0$ o sumie współrzędnych 1, niech $\vec{R}$ będzie rankingiem. Policzmy:

$$\begin{aligned} M^k\vec{V} &= M^k\vec{R} + M^k(\vec{V} - \vec{R}) \\ &= \vec{R} + M^k(\vec{V} - \vec{R}) \end{aligned}$$

Chcemy więc sprawdzić, jak się zachowuje $M^k(\vec{V} - \vec{R})$. W ogólności ciężko coś powiedzieć, ale zauważmy, że skoro suma współrzędnych $\vec{V}, \vec{R}$ to 1, to $\vec{V} - \vec{R}$ ma sumę współrzędnych równą 0; analogicznie, również suma współrzędnych $M^k\vec{V}$ oraz $M^k\vec{R} = \vec{R}$ jest równa 1, czyli $M^k(\vec{V} - \vec{R})$ ma sumę współrzędnych równą 0.

Zdefiniujmy $\mathbb{V}_{=0}$: przestrzeń liniową wektorów, których współrzędne sumują się do 0:

$$\mathbb{V}_{=0} = \{[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]^T \ : \ \sum_i v_i = 0\} \ .$$

Fakt 9.14. $M^k(\vec{V} - \vec{R}) \in \mathbb{V}_{=0}$.

Chcemy coś powiedzieć o „granicy" $M^k\vec{W}$ dla $\vec{W} \in \mathbb{V}_{=0}$. Skoro jest granica, to jest potrzebna jakaś odległość.

Definicja 9.15. Norma ℓ_1 $\|\cdot\|_1$ wektora $\vec{V} = [\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]^T$ to

$$\|\vec{V}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \ .$$

Tak zdefiniowana norma nie rośnie przy stosowaniu macierzy stochastycznych:

Fakt 9.16. *Niech A będzie macierzą stochastyczną. Wtedy dla dowolnego wektora $\vec{V}$:*

$$\|A\vec{V}\|_1 \leq \|\vec{V}\|_1 \ .$$

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.
W ogólności można pokazać, że dla dowolnej macierzy stochastycznej $A > 0$ oraz $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|AV\|_1 \leq (1 - \epsilon(A))\|V\|_1$$

dla pewnej (dodatniej) funkcji $\epsilon(A)$ macierzy A.

Lemat 9.17. *Niech A będzie dodatnia macierzą stochastyczną. Niech*

$$a = \max_{1 \leq j \leq n} (1 - 2 \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j}) \ .$$

Niech $\vec{0} \neq \vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$. Wtedy

$$\|AV\|_1 \leq a\|V\|_1 \ .$$

Uwaga. Niejawnie zakładamy, że $n > 1$, żeby a było dodatnie.

dowód: nie prezentowany na wykładzie; dla zainteresowanych. Niech $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$. Niech $\operatorname{sgn} x$ oznacza znak x, tj. $x \geq 0 \implies \operatorname{sgn}(x) = 1, x < 0 \implies \operatorname{sgn}(x) = -1$. Oznaczmy $\vec{W} = A\vec{V}$, niech $\vec{W} = [w_1, \ldots, w_n]^T$. Jeśli $\vec{W} = \vec{0}$ to teza oczywiście zachodzi.

$$\begin{aligned}
\|W\|_1 &= \sum_i |w_i| \\
&= \sum_i \operatorname{sgn}(w_i) w_i \\
&= \sum_i \operatorname{sgn}(w_i) \sum_j a_{i,j} v_j \\
&= \sum_j v_j \sum_i \operatorname{sgn}(w_i) a_{i,j} \\
&\leq \sum_j |v_j| \cdot \left| \sum_i \operatorname{sgn}(w_i) a_{i,j} \right|
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\sum_i a_{i,j} = 1$ oraz że $w_1, \ldots, w_n$ nie są wszystkie tego samego znaku, bo $\vec{0} \neq \vec{W} \in \mathbb{V}_{=0}$. Czyli $0 \leq |\sum_i \operatorname{sgn}(w_i) a_{i,j}| \leq 1 - 2\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,j} \leq a$, bo od $\sum_i a_{i,j}$ odejmujemy przynajmniej dwa elementy.

$$\begin{aligned}
\sum_j |v_j| \cdot \left| \sum_i \operatorname{sgn}(w_i) a_{i,j} \right| &\leq \sum_j |v_j| \cdot a \\
&= a\|\vec{V}\|_1
\end{aligned}$$

□

Niestety, oszacowanie to jest w pesymistycznym przypadku liniowo zależne od najmniejszego elementu A i tym samym dla macierzy M' z algorytmu PageRank otrzymujemy wartość rzędy $1 - m/n$, gdzie n jest wielkością grafu (u nas: rzędu miliardów) a m parametrem z PageRank (u nas: stała ok. 0,17). Oznacza to, że zbieżność kolejnych iteracji jest bardzo wolna i w ogólności potrzebujemy $\Theta(n)$ iteracji, by zmniejszyć błąd dwukrotnie. Tym samym cała operacja jest w ogólności niewykonalne obliczeniowo. Na szczęście, w przypadku dla macierzy M' z PageRank można pokazać dużo lepsze ograniczenie:

Lemat 9.18. *Niech $A \geq 0$ będzie macierz stochastyczną (niekoniecznie dodatnią!) rozmiaru $n \times n$ a P macierzą stochastyczną $n \times n$ postaci*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} .$$

Dla liczby rzeczywistej $0 \leq m \leq 1$ niech M_m oznacza macierz

$$M_m = (1-m)A + mP \ ,$$

wtedy dla wektora $\vec{V} \in \mathbb{V}_{=0}$ zachodzi

$$\|M_m \vec{V}\|_1 \leq (1-m)\|\vec{V}\|_1 \ .$$

Prosty dowód pozostawimy jako ćwiczenie.

Zauważmy też, że obliczanie $M'\vec{V}$ jest prostsze ze względu na strukturę M': nasza dodatnia macierz stochastyczna jest w istocie macierzą

$$(1-m)M + m \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} .$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} M'\vec{V} &= (1-m)M\vec{V} + m \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \vec{V} \\ &= (1-m)M\vec{V} + \begin{bmatrix} \frac{m}{n} \\ \frac{m}{n} \\ \vdots \\ \frac{m}{n} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Zauważmy, że ten iloczyn liczy się dużo prościej: macierz M jest dość rzadka. Co więcej, liczenie można zrównoleglić (każdy element $M\vec{V}$ może być liczony osobno).

Uwaga. W podobny sposób pokazuje się Lemat 9.18.

9.4 Dowód zbieżności przy użyciu macierzy Jordana

Nie prezentowane na wykładzie; dla zainteresowanych

Pokażemy, że zbieżność metody iteracyjnej wynika z tego, że każda macierz jest podobna do macierzy Jordana.

Zdefiniujmy najpierw granicę macierzy:

Definicja 9.19. Ciąg macierzy $A_{k k\geq 1}$ ustalonego rozmiaru ma granicę (punktowo) A, jeśli dla każdych $1 \leq i, j \leq j$ zachodzi $\lim_{k\to\infty}(A_k)_{i,j} = A_{i,j}$.

Analogicznie definiujemy granicę wektorów.

Przy mnożeniu wektora przez macierz można „przechodzić do granicy”:

Lemat 9.20. *Jeśli $\lim_{k\to\infty} A_k = A$ to*

$$\lim_{k\to\infty} A_k\vec{V} = A\vec{V}$$

Dowód wynika z ciągłości mnożenia i dodawania.
W takim razie, zamiast liczyć

$$\lim_{k\to\infty}(M')^k\vec{V}$$

dla macierzy PageRank oraz pewnego wektora $\vec{V}$, możemy skupić się na policzeniu

$$\lim_{k\to\infty}(M')^k$$

Korzystając z tego, że $M' = AJA^{-1}$ dla pewnej macierzy Jordana J, pozostaje nam policzyć

$$\lim_{k\to\infty}(AJA^{-1})^k = A\left(\lim_{k\to\infty}J^k\right)A^{-1}$$

Powinniśmy więc zrozumieć, jakie mogą być wartości własne, a z drugiej, jak wygląda granica dla jednej klatki Jordana.

Lemat 9.21. *Jeśli A jest dodatnią macierzą stochastyczną, to:*

- *krotność algebraiczna wartości własnej* 1 *wynosi* 1*;*
- *A nie ma wartości własnej o module większym niż* 1*;*
- *A nie ma wartości własnej o module* 1 *innej niż* 1*.*

Dowód. Pokażemy pierwszy punkt, pozostałe pozostaną jako ćwiczenia.

Niech $A = BJB^{-1}$, gdzie J jest macierzą Jordana. Wiemy, że krotność geometryczna 1 to 1, tak więc jest tylko jedna klatka dla 1, nazwijmy ją J_1. Jeśli J_1 ma rozmiar większy niż 1 (co odpowiada temu, że krotność algebraiczna to więcej niż 1) to w szczególności w drugiej kolumnie ma wektor $[1,1,0,\ldots,0]^T$. Bez zmniejszenia ogólności ta klatka Jordana (J_1) jest w lewym górnym rogu. Łatwo sprawdzić, że $J_1^k\vec{E}_2 = [k,1,0,\ldots,0]^T$. W takim razie

$$\begin{aligned}A^k(B\vec{E}_2) &= (BJB^{-1})^k(B\vec{E}_2)\\ &= BJ^kB^{-1}(B\vec{E}_2)\\ &= BJ^kB\vec{E}_2\\ &= B\begin{bmatrix}k\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}\|B[k,1,0,\ldots,0]^T\|_1 &\geq \|B\vec{k}E_1\|_1 - \|B\vec{E}_2\|_1\\ &= k\|B\vec{E}_1\|_1 - \|B\vec{E}_2\|_1\end{aligned}$$

Jako że B jest odwracalna, to $B\vec{E}_1 \neq \vec{0}$ i w takim razie $\|B\vec{E}_1\|_1 > 0$ i w takim razie $A^kB\vec{E}_2$ ma dowolnie dużą normę ℓ_1. Z drugiej strony, wiemy już, że $\|A^kB\vec{E}_2\|_1 \leq \|B\vec{E}_2\|_1$, sprzeczność. □

W takim razie nasza macierz Jordana J wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix}1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_\ell\end{bmatrix}$$

gdzie każda J_i jest klatką Jordana dla wartości własnej λ_i o module mniejszym niż 1. Granica takiej klatki Jordana to 0:

Lemat 9.22. *Niech J_λ będzie klatką Jordana dla wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$, gdzie $|\lambda| < 1$. Wtedy $\lim_{k\to\infty} J_\lambda^k$ jest macierzą zerową.*

Dowód. Niech $J_\lambda = \mathrm{Id} + J'$ będzie macierzą $m \times m$, gdzie

$$J' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Jako że

$$J'\vec{E}_i = \begin{cases} \vec{0} & \text{dla } i = 1, \\ \vec{E}_{i-1} & \text{dla } i > 1, \end{cases}$$

to z prostego dowodu indukcyjnego mamy, że dla $k \geq 0$

$$(J')^k \vec{E}_i = \begin{cases} \vec{0} & \text{dla } i \leq k, \\ \vec{E}_{i-k} & \text{dla } i > k, \end{cases}$$

Czyli, intuicyjnie, $(J')^k$ to macierz, która ma jedynki tylko na k-tej „nadprzekątnej".

Jako że Id oraz J' komutują (tj. $\mathrm{Id}\, J' = J'\,\mathrm{Id}$), to

$$(\lambda\,\mathrm{Id} + J')^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (J')^i \lambda^{k-i}$$

Skoro macierz jest rozmiaru $m \times m$, to $(J')^k = 0$ dla $k \geq m$, czyli w tej sumie zostaje

$$\sum_{i=0}^{m-1} \binom{k}{i} (J')^i \lambda^{k-i}$$

Suma jest skończona, przy liczeniu granicy można policzy każdy z elementów osobno. Zauważmy, że dla ustalonego i granica

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} = 0 \ .$$

Czyli cała granica to macierz zerowa. □

Niech $A = BJB^{-1}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} A^k &= \lim_{k\to\infty} BJ^kB^{-1} \\ &= B(\lim_{k\to\infty} J^k)B^{-1} \\ &= B1_{11}B^{-1} \end{aligned}$$

Niech $B = [B_1|\cdots|B_n]$, rozpatrzmy bazę $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_n$. Łatwo sprawdzić, że $B^{-1}\vec{B}_i = \vec{E}_i$ Rozważmy dowolny wektor $\vec{V}$, przedstawmy go jako kombinację

$$\vec{V} = \sum_i \alpha + i\vec{E}_i \ .$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} (A^k\vec{V}) &= B1_{11}B^{-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{B}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B1_{11}\vec{E}_i \\ &= \alpha_1 B1_{11}\vec{E}_1 \\ &= \alpha_1 \vec{B}_1 \end{aligned}$$

Zauważmy, że bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $\vec{B}_1$ to ranking (bo oba są wektorami własnymi dla wartości własnej 1, kwestia przeskalowania). Podstawiając pod $\vec{V}$ dowolny wektor stochastyczny dostajemy

$$\lim_{k\to\infty}(A^k\vec{V}) = \alpha_1\vec{R}$$

dla pewnej stałej α_1. Jednocześnie wiemy, że A^k jest stochastyczna, więc $(A^k\vec{V})$ jest wektorem stochastycznym, granica wektorów stochastycznych jest stochastyczna (ciągłość sumy), czyli $\alpha_1 = 1$, co należało pokazać.

9.5 Grafy silnie spójne

Jeśli dany na wejściu graf jest silnie spójny (czyli z każdego wierzchołka da się dojść do każdego innego), to można pokazać, że $\dim \mathbb{V}_1 = 1$ nawet dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa.

Choć założenie o silnej spójności wygląda niewinnie, to w praktyce jest to bardzo silne i rzadko spełnione założenie.

Definicja 9.23. Mówimy, że (skierowany) graf jest *silnie spójny*, jeśli dla każdej pary wierzchołków i, j istnieje ścieżka z i do j (oraz z j do i).

Lemat 9.24. *Dla znormalizowanej macierzy sąsiedztwa M grafu silnie spójnego o n wierzchołkach macierz $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^i$ jest dodatnią macierzą stochastyczną.*

Dowód. Z Faktu 9.3 mamy, że tak zdefiniowana macierz jest stochastyczna.

Przypomnijmy, że w M^k element ij jest niezerowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka z j do i długości dokładnie k. Skoro graf jest spójny, to między każdą parą wierzchołków j, i istnieje ścieżka długości najwyżej $n-1$. W takim razie dla pewnego $k \leq n-1$ mamy, że element ij macierzy M^k jest dodatni. (Dla $i = j$ korzystamy z tego, że $M^0 = \mathrm{Id}$) □

Lemat 9.25. *Jeśli $\vec{V}$ jest wektorem własnym znormalizowanej macierzy sąsiedztwa dla wartości* 1*, to jest nim też dla macierzy $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^i$.*

Dowód. Zauważmy najpierw, że $M^i\vec{V} = 1^i\vec{V} = \vec{V}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^i\right)\vec{V} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(M^i\vec{V}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\vec{V}\\ &= \frac{1}{n}\cdot n\cdot\vec{V}\\ &= \vec{V}\end{aligned}$$

□

Twierdzenie 9.26. *Jeśli graf jest spójny, to jego znormalizowana macierz sąsiedztwa ma* $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.

Dowód. Wiemy z Lematu 9.6, że $\dim \mathbb{V}_1 \geq 1$.

Rozpatrzmy macierz $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} M^i$. Oznaczmy przestrzeń jej wektorów własnych dla wartości własnej 1 przez $\mathbb{V}_1'$. Z Lematu 9.25 każdy wektor własny M dla wartości 1 jest też wektorem tej macierzy, czyli $1 \leq \dim \mathbb{V}_1 \leq \dim \mathbb{V}_1'$. Z Lematu 9.24 ta macierz jest stochastyczna dodatnia i z Twierdzenia 9.12 wymiar jej przestrzeni wektorów własnych dla wartości 1 to jeden, tj. $\dim \mathbb{V}_1' = 1$ i tym samym $1 = \dim \mathbb{V}_1' = \dim \mathbb{V}_1$. □

Uwaga. W rozdziale 9.5 pokazaliśmy, że jeśli graf jest silnie spójny, to ma jednoznacznie wyznaczony ranking.

Jednak nietrudno pokazać, że silna spójność nie wystarcza, by zagwaranotować poprawność iteracyjnych metod obliczania rankingu: przykładowo: dla grafu będącego n-cyklem skierowanym ranking przydziela $\frac{1}{n}$ każdemu wierzchołkowi. Z drugiej strony, dla wektora $\vec{E}_i$ potęgi $M^k\vec{E}_i$ to wektory jednostkowe.

By zagwarantować poprawność metod iteracyjnych, należy dodatkowo założyć, że największy wspólny dzielnik wszystkich cykli w grafie to 1.

Ten problem ma też teoretyczną interpretację: jest to pytanie o zbieżność rozkładu do rozkładu stacjonarnego.

Rozdział 10

(Standardowy) iloczyn skalarny

10.1 Standardowy iloczyn skalarny

Definicja 10.1 (Standardowy iloczyn skalarny)**.** Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz wielu $\mathbb{F}^n$ (ale nie $\mathbb{C}^n$) definiujemy iloczyn skalarny jako:

$$[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]^T \cdot [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]^T = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \vec{u}_i, \quad ,$$

zauważmy, że

$$\vec{V}^T \cdot \vec{U} = [\vec{V} \cdot \vec{U}]$$

W wielu wypadkach nie będziemy rozróżniać pomiędzy skalarem a macierzą 1×1: choć formalnie jest to nadużycie, owocuje dużo prostszą notacją. Dla $\mathbb{C}^n$ definiujemy zaś:

$$[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]^T \cdot [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]^T = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \overline{\vec{u}_i}$$

Dla $\mathbb{R}^n$ czy $\mathbb{C}^n$ możemy go użyć do zdefiniowania (standardowej) długości, odległości oraz prostopadłości, kąta:

długość Długość (norma) wektora $\vec{V}$ to

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$$

odległość Odległość między wektorami $\vec{U}, \vec{V}$ to

$$\|\vec{U} - \vec{V}\|$$

kąt Kąt między wektorami $\vec{U}, \vec{V}$ to $\alpha \in [0, \pi]$ spełniające warunek

$$\cos \alpha = \frac{\vec{V} \cdot \vec{U}}{\|\vec{V}\| \cdot \|\vec{U}\|}$$

prostopadłość Dwa wektory $\vec{U}, \vec{V}$ są prostopadłe, co oznaczamy jako $\vec{V} \perp \vec{U}$, jeśli

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$$

Ta definicja prostopadłości okaże się przydatna nawet wtedy, kiedy kąt czy długość nie mają wiele sensu.

W dalszej części będziemy się zajmować iloczynem w wersji bez sprzężenia.

Fakt 10.2. *Standardowy iloczyn skalarny jest:*

1. *liniowy względem każdej współrzędnej (dla wersji dla $\mathbb{C}$: dla pierwszej współrzędnej)*

2. symetryczny, tj. $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$ *(wersja nad* $\mathbb{C}$*: antysymetryczny).*

Prosty dowód wynika wprost z definicji.

Lemat 10.3 (Cauchy-Schwartz)**.** *Dla* $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$ *zachodzi nierówność*

$$\vec{U} \cdot \vec{V} \leq \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|$$

i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{U}, \vec{V}$ *są liniowo zależne.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Definicja 10.4 (Wektory prostopadłe)**.** Dwa wektory $\vec{U}$, $\vec{V}$ są *prostopadłe*, gdy $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$. Zapisujemy to też jako $\vec{U} \perp \vec{V}$.

Lemat 10.5. *Dla przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *podane powyżej definicje długości, prostopadłości i kąta między wektorami pokrywają się z tradycyjnymi.*

Dowód. Dla wektora $\vec{V} = [v_1, \ldots, v_n]^T$ jego długość to $\sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$, jednocześnie

$$\begin{aligned}\sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} &= \sqrt{[v_1, \ldots, v_n]^T \cdot [v_1, \ldots, v_n]^T} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2},\end{aligned}$$

co należało pokazać.

Co do kąta między wektorami: policzmy kwadrat długości wektora $\vec{U} - \vec{V}$:

$$\begin{aligned}\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 &= (\vec{U} - \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) \\ &= \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V}\end{aligned}$$

Jednocześnie z Twierdzenia cosinusów mamy

$$\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - 2\cos\alpha \|U\| \cdot \|V\|$$

I tym samym

$$\cos\alpha = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\|}$$

Skorzystaliśmy z Twierdzenia cosinusów, które wymaga trochę (nietrudnego) zachodu. Pokażemy, że nasze narzędzia pozwalają policzyć tę własność bezpośrednio:

Sprawdźmy najpierw przypadek prostopadłości, tj. chcemy pokazać, że

$$\cos\alpha = 0 \iff \left\langle \vec{U}, \vec{V} \right\rangle = 0$$

Obliczenia są podobne:

$$\begin{aligned}\|\vec{U} - \vec{V}\|^2 &= (\vec{U} - \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) \\ &= \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V}\end{aligned}$$

I w takim razie z Twierdzenia Pitagorasa, kąt między $\vec{U}, \vec{V}$ jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$.

Dla dowolnego kąta zauważmy, że możemy bez zmniejszenia ogólności założyć, że $\|\vec{U}\| = \|\vec{V}\| = 1$. Gdyby było tak, że $\vec{V} = [1, 0, 0 \ldots, 0]^T$ oraz $\vec{U} = [x, y, 0, \ldots,]^T$ to z podstawowej trygonometrii mamy $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$, gdzie α jest kątem między $\vec{V}$ a $\vec{U}$, i wtedy $\vec{V} \cdot \vec{U} = \cos\alpha$.

W ogólności chcielibyśmy postąpić podobnie, w tym celu należałoby wyrazić $\vec{U} = a\vec{V} + \vec{Z}$, gdzie $\vec{V}$ i $\vec{Z}$ są prostopadłe. Wtedy ponownie z podstawowej geometrii mamy

$$\vec{U} = \cos\alpha \vec{V} + \beta \vec{Z}$$

I w iloczynie skalarnym dostajemy:

$$\begin{aligned}\vec{U}\cdot\vec{V} &= (\cos\alpha\vec{V}+\vec{Z})\cdot\vec{V}\\ &= \cos\alpha\underbrace{\vec{V}\cdot\vec{V}}_{=1}+\underbrace{\vec{V}\cdot\vec{Z}}_{=0}\\ &= \cos\alpha\ .\end{aligned}$$

Spróbujmy wyliczyć, jak wygląda taka reprezentacja: jeśli $\vec{U}=a\vec{V}+\vec{Z}$, gdzie $\vec{V}\cdot\vec{Z}=0$ to a można wyliczyć:

$$\begin{aligned}\vec{V}\cdot\vec{U} &= \vec{V}\cdot(a\vec{V}+\vec{Z})\\ &= a\vec{V}\cdot\vec{V}+\vec{V}\cdot\vec{Z}\\ &= a\end{aligned}$$

I wtedy

$$\vec{Z}=\vec{U}-\vec{V}\cdot\vec{U}\vec{V}$$

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany $\vec{Z}$ jest prostopadły do $\vec{V}$:

$$\begin{aligned}(\vec{U}-(\vec{U}\cdot\vec{V})\cdot\vec{V})\cdot\vec{V} &= \vec{U}\cdot\vec{V}-((\vec{U}\cdot\vec{V})\cdot\vec{V})\cdot\vec{V}\\ &= \vec{U}\cdot\vec{V}-(\vec{U}\cdot\vec{V})\cdot(\vec{V}\cdot\vec{V})\\ &= (\vec{U}\cdot\vec{V})-\vec{U}\cdot\vec{V}\cdot 1\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

□

10.2 Dopełnienie ortogonalne

Definicja 10.6 (Dopełnienie ortogonalne)**.** Niech $U\subseteq\mathbb{F}^n$. Wtedy *dopełnienie ortogonalne* U to:

$$U^{\perp}=\{\vec{V}\in\mathbb{F}^n\ :\ \forall_{\vec{W}\in U}\ \vec{V}\perp\vec{W}\}$$

Fakt 10.7. *Jeśli* $\mathrm{LIN}(B)=\mathbb{W}$ *to* $\vec{V}\in\mathbb{W}^{\perp}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\vec{V}$ *jest prostopadły do każdego wektora z* B*.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli $\vec{V}\in\mathbb{W}^{\perp}$ to w szczególności jest prostopadły do każdego wektora z $B\subseteq W$.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\vec{V}\cdot\vec{B_i}$ dla każdego wektora $\vec{B_i}\in B$. Wtedy dowolny wektor $\vec{U}\in W$ wyraża się jako $\sum_i\alpha_i\vec{B_i}$ i dlatego:

$$\begin{aligned}\vec{V}\cdot\vec{U} &= \vec{V}\cdot\sum_i\alpha_i\vec{B_i}\\ &= \sum_i\alpha_i\vec{V}\cdot\vec{B_i}\\ &= \sum_i\alpha_i\cdot 0\\ &= 0\ .\end{aligned}$$

□

Lemat 10.8. $(\mathrm{LIN}(\vec{V_1},\ldots,\vec{V_m}))^{\perp}=\ker([\vec{V_1}|\cdots|\vec{V_m}]^T)$.

Ponadto, gdy $\vec{V_1},\ldots,\vec{V_m}\in\mathbb{F}^n$ *są liniowo niezależne, to* $\dim\mathrm{LIN}(\vec{V_1},\ldots,\vec{V_m})^{\perp}=n-m$.

W szczególności, $\mathbb{W}^{\perp}\leq\mathbb{F}^n$.

Dowód. Z faktu powyżej $\vec{V}\in\mathrm{LIN}(\vec{V_1},\ldots,\vec{V_m})^{\perp}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{V}\perp\vec{V_i}$ dla każdego $i=1,\ldots,m$. Jednocześnie

$$[\vec{V_1}|\cdots|\vec{V_m}]^T\vec{V}=\begin{bmatrix}\vec{V_1}^T\\ \vec{V_2}^T\\ \vdots\\ \vec{V_m}^T\end{bmatrix}\vec{V}=\begin{bmatrix}\vec{V_1}^T\cdot\vec{V}\\ \vec{V_2}^T\cdot\vec{V}\\ \vdots\\ \vec{V_m}^T\cdot\vec{V}\end{bmatrix}$$

to dokładnie wektor iloczynów skalarnych kolejnych $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_m$ z $\vec{V}$. W drugą stronę analogicznie.

Wymiar to prosty rachunek.

Wiemy, że jądro jest podprzestrzenią liniową. □

Lemat 10.9. *Niech $U \subseteq \mathbb{F}^n$. Wtedy $(U^\perp)^\perp \supseteq U$.*

Dowód. Niech $\vec{U} \in U$. Wtedy dla każdego $\vec{V} \in U^\perp$ mamy $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$, czyli $\vec{U} \in (U^\perp)^\perp$. □

Wniosek 10.10. Niech $\mathbb{W} \leq \mathbb{F}^n$. Wtedy $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$.

Dowód. Wiemy, że

$$\mathbb{W} \leq (\mathbb{W}^\perp)^\perp \leq \mathbb{F}^n$$

Zaś wymiar

$$\dim(\mathbb{W}^\perp)^\perp = n - \dim(\mathbb{W}^\perp) = n - (n - m) = m = \dim \mathbb{W} \ ,$$

co pokazuje tezę. □

10.3 Zastosowanie: kody korekcyjne

Liniowym kodem korekcyjnym nazywamy podprzestrzeń $\mathbb{W} \leq \mathbb{F}^n$ dla skończonego ciała $\mathbb{F}$; zwykle dobieramy $\mathbb{F}$ takie, że $|\mathbb{F}|$ jest potęgą 2. Niech $k = \dim \mathbb{W}$.

Większość klasycznych kodów korekcyjnych to kody liniowe, w tym zapewne najbardziej znane kody Reeda-Solomona. Kodami liniowymi są też kody parzystości (które dodają bit parzystości) czy też używany standardowo kod SECDED (wariant ogólniejszej klasy kodów Hamminga). Dzięki temu, że $\mathbb{W} \neq \mathbb{F}^n$ nadmiarowość kodu pozwala na poprawianie błędów, najlepsze kody pozwalają na poprawianie do $\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$ błędów; jest to optymalna korekcja.

Kodowanie to przekształcanie wiadomości z $\mathbb{F}^k$ w $\mathbb{W}$. Teoretycznie dowolne, w praktyce stosuje się jednak macierze: jeśli $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_k$ jest bazą $\mathbb{W}$ oraz $M = [\vec{V}_1| \cdots |\vec{V}_k]$, to mnożenie przez M (z lewej strony) jest kodowaniem.

Macierz M nazywa się *macierzą generatorów*. Duże rodziny kodów, o możliwych do dobrania parametrach, zwykle są tworzone na podstawie znanych ogólnych struktur algebraicznych (zwykle: wielomianów o pewnych własnościach), są też „konkretne" kody powstałe dzieki znanym strukturom kombinatorycznym.

Kody $\mathbb{W}, \mathbb{W}'$ są równoważne, jeśli wektory z $\mathbb{W}'$ są uzyskane z wektorów z $\mathbb{W}$ przez ustaloną permutację współrzędnych.

Można pokazać (ćwiczenie), że bez zmniejszenia ogólności kodowanie „dokleja" do wiadomości bity kontrolne:

Lemat 10.11. *Dla kodu $\mathbb{W}$ istniej równoważny kod $\mathbb{W}'$ dla którego istnieje macierz generatorów jest postaci* $\begin{bmatrix} \mathrm{Id} \\ M' \end{bmatrix}$.

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Takie kodowanie nazywamy *systematycznym*. Zauważmy, że kodowanie, jak i dekodowanie jest dużo prostsze dla kodowania systematycznego. Prostym kodem systematycznym jest np. dodawanie bitu kontroli parzystości.

Okazuje się, że przy poprawianiu błędów, czy nawet sprawdzaniu, czy wektor należy do kodu, macierz generatorów nie sprawdza się za dobrze. Zamiast tego używa się *macierzy parzystości*:

Dla kodu $\mathbb{W}$ kod $\mathbb{W}^\perp$ to *kod dualny*. Macierz generatorów kodu dualnego to *macierz parzystości* oryginalnego kodu. Innymi słowy: P jest macierzą parzystości $\mathbb{W}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{W} = \ker P$.

To pozwala na proste sprawdzenie, czy wektor jest w kodzie. Co więcej, najlepsze algorytmy dekodowania zwykle oparte są na własnościach macierzy parzystości.

Rozdział 11

Ogólny iloczyn skalarny

Chcemy uogólnić pojęcia odległości, prostopadłości, kąta na dowolną przestrzeń. W tym celu uogólnimy iloczyn skalarny. W zasadzie to rozważamy przestrzenie nad $\mathbb{R}$, informacyjnie nad $\mathbb{C}$.

Popatrzymy od innej strony: co musi spełniać funkcja dwóch zmiennych, by być „iloczynem skalarnym".

Definicja 11.1 (Iloczyn skalarny)**.** *Iloczyn skalarny* to funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \mapsto \mathbb{F}$ (gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$) spełniająca warunki:

(SK1) liniowa po pierwszej współrzędnej

(SK2) symetryczna, tj. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$; (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub antysymetryczny $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$ (np. dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

(SK3) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ dla $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Przestrzeń liniową, która ma tak określony iloczyn skalarny, nazywamy *przestrzenią Euklidesową* (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub *unitarną* (jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Uwaga. Ostatni warunek ma sens dla $\mathbb{C}$, bo wartość jest samosprzężona. Dla innych ciał ostatni warunek może nie mieć sensu.

To pozwala na zdefiniowanie prostopadłości oraz długości.

Definicja 11.2 (Wektory prostopadłe)**.** Dwa wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ są *prostopadłe*, gdy $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. Zapisujemy to też jako $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Definicja 11.3 (Długość i odległość)**.** W przestrzenie Euklidesowej (unitarnej):
Norma (*długość*) wektora $\vec{v}$ to $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.
Odległość między $\vec{u}$ a $\vec{v}$ to norma z $(\vec{u} - \vec{v})$, tj. $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Przykład 11.4.

- Tradycyjny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ spełnia te warunki.
- W przestrzeni wielomianów (nad $\mathbb{R}$) jako iloczyn skalarny można wziąć całkę (po odpowiednim zakresie):
$$\langle u, v \rangle = \int_I u(x)v(x)dx$$
- dla zmiennych losowych X, Y iloczynem skalarnym jest $\mathcal{E}[X \cdot Y]$, tj.
$$\langle X, Y \rangle = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \cdot \mathbb{P}[\omega] \ .$$
Dużo częściej stosuje się jednak kowariancję:
$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - \mathbb{E}[X]) \cdot (Y(\omega) - \mathbb{E}[Y]) \cdot \mathbb{P}[\omega] \ .$$
Zauważmy, że formalnie nie jest to iloczyn skalarny: dla funkcji stałej jest on równy 0; formalnie identyfikujemy funkcje przesunięte o stałą.

Iloczyn skalarny ma wiele dobrych własności:

Lemat 11.5. *Jeśli $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Euklidesową (unitarną), to:*

1. $\|t\vec{v}\| = |t| \cdot \|\vec{v}\|$
2. $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ *(Nierówność Cauchy-Schwartz); równość* $\iff$ *są liniowo zależne*
3. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ *(Nierówność Minkowsky)*
4. $\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|$

Dowód. Ad 1: Oczywiste

Ad 2: Jak są liniowo zależne, to jasne. Rozważmy

$$f(t) = \|\vec{v} - t\vec{w}\|^2 > 0 \ .$$

Ma wartości ściśle dodatnie.

Po przekształceniu

$$f(t) = \|\vec{v}\|^2 - 2t \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + t^2 \|\vec{w}\|^2 > 0 \ .$$

Patrzymy na

$$\Delta = 4 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 - 4\|\vec{w}\|^2 \|\vec{v}\|^2 < 0 \ ,$$

co daje tezę.

Przy okazji: równość jest tylko wtedy, gdy są liniowo zależne.

Ad 3:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Ad 4: Wynika z punktu trzeciego. □

Z nierówności Schwarza (dla liczb rzeczywistych) mamy

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$$

I tym samym możemy zdefiniować *kąt* miedzy wektorami

Definicja 11.6. W przestrzeni Euklidesowej (unitarnej) dla wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ kąt między nimi to jedyne takie $\alpha \in [0, \pi]$, że

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

11.1 Baza ortonormalna

Definicja 11.7 (Układ (baza) ortogonalny, układ (baza) ortonormalny)**.** Układ wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ jest *układem ortogonalnym*, jeśli dla $i \neq j$ mamy $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$. Jest układem *ortonormalnym*, jeśli dodatkowo $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 1$.

Analogicznie definiujemy bazę ortogonalną i ortonormalną.

To jest w pewnym sensie odpowiednik bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 11.8. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną). Wtedy $\mathbb{V}$ ma bazę ortonormalną.*

Dowód wynika z bardziej technicznego lematu:

Lemat 11.9. *Niech $\mathbb{V}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią Euklidesową (unitarną), niech B będzie niezależnym układem ortogonalnym. Wtedy* $\mathrm{LIN}(B) = \mathbb{V}$ *lub istnieje $\vec{b}' \in \mathbb{V} \setminus B$, taki że $B' = B \cup \{\vec{b}'\}$ jest ortogonalny i niezależny.*

Dowód. Zauważmy, że bez zmniejszenia ogólności, możemy założyć, że B jest układem ortonormalnym: wystarczy każde $\vec{b} \in B$ przemnożyć przez skalar $\|\vec{b}\|^{-1}$.

Jeśli $B = \emptyset$ to bierzemy dowolny niezerowy wektor z $\mathbb{V}$ (jeśli $\mathbb{V} = \{\vec{0}\}$ to teza zachodzi dla $B = \emptyset$).

Jeśli $\mathrm{LIN}(B) = \mathbb{V}$ to teza oczywiście zachodzi.

Niech więc $\mathrm{LIN}\, B \neq \mathbb{V}$. Niech $\vec{v} \notin \mathbb{W}$. Rozpatrzmy wektor

$$\vec{b}' = \vec{v} - \sum_{\vec{b} \in B} \left\langle \vec{b}, \vec{v} \right\rangle \vec{b}$$

Nie należy on do $\mathbb{W}$ (bo jest sumą $\vec{v}$ oraz wektora z $\mathbb{W}$) i łatwo sprawdzić, że należy do $\mathbb{W}^{\perp}$: sprawdźmy, że jest prostopadły dla każdego $\vec{b}'' \in B$:

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{b}'', \vec{v} - \sum_{\vec{b} \in B} \left\langle \vec{b}, \vec{v} \right\rangle \vec{b} \right\rangle &= \left\langle \vec{b}'', \vec{v} \right\rangle - \left\langle \vec{b}'', \sum_{\vec{b} \in B} \left\langle \vec{b}, \vec{v} \right\rangle \vec{b} \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{b}'', \vec{v} \right\rangle - \sum_{\vec{b} \in B} \left\langle \vec{b}, \vec{v} \right\rangle \underbrace{\left\langle \vec{b}'', \vec{b} \right\rangle}_{0 \text{ dla } \vec{b} \neq \vec{b}''} \\
&= \left\langle \vec{b}'', \vec{v} \right\rangle - \left\langle \vec{b}'', \vec{v} \right\rangle \left\langle \vec{b}'', \vec{b}'' \right\rangle \\
&= \left\langle \vec{b}', \vec{v} \right\rangle - \left\langle \vec{b}', \vec{v} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wtedy $B \cup \{\vec{b}'\}$ jest niezależnym układem ortogonalnym. □

Dowód Twierdzenia 11.8 wynika z Lematu 11.9, przy czym na początku bierzemy pusty zbiór niezależny.

Lemat 11.10. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną), $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bazą ortonormalną a $\vec{v} \in \mathbb{V}$. Wtedy*

$$[\vec{v}]_B = \left[\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle, \langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle, \ldots, \langle \vec{v}, \vec{v}_n \rangle\right]^T \ .$$

Dowód.

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}, \vec{v}_i \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{v}_j, \vec{v}_i \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \\
&= \alpha_i \|\vec{v}_i\|^2 \\
&= \alpha_i \ .
\end{aligned}$$

□

Lemat 11.11. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną). Niech $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ będzie przekształceniem liniowym, zaś $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bazą ortonormalną. Wtedy*

$$M_{BB}(F) = (\langle F(\vec{v}_j), \vec{v}_i \rangle)_{i,j=1,\ldots,n} \ .$$

Dowód. Wiemy z definicji $M_{BB}(F)$, że

$$M_{BB}(F) = [(F\vec{v}_1)_B | (F\vec{v}_2)_B | \cdots | (F\vec{v}_n)_B]$$

Teraz pozostaje skorzystać z Lematu11.10:

$$(F\vec{v}_j)_B = \left[\langle F\vec{v}_j, \vec{v}_1 \rangle, \ldots, \langle F\vec{v}_j, \vec{v}_n \rangle\right]^T \ . \quad \square$$

Zauważmy, że używając bazy ortonormalnej można wyrazić (abstrakcyjny) iloczyn skalarny w analogiczny sposób jak iloczyn standardowy, trzeba tylko przejść przez reprezentację w odpowiedniej bazie:

Lemat 11.12. *Jeśli $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej) $\mathbb{V}$, $B = \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ jest bazą ortonormalną, to*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_B \cdot [\vec{v}]_B$$

tj. wartość iloczynu skalarnego $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny reprezentacji $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$.

W szczególności

$$\|\vec{u}\| = \|(\vec{u})_B\|$$

przy czym długość po prawej to zwykła długość wektorów w $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Dowód. Obie strony są liniowe względem obu współrzędnych, dlatego wystarczy pokazać dla elementów z bazy, czyli $\vec{u}, \vec{v} \in B$. Wtedy $[\vec{b}_i]_B = \vec{E}_i$ i mamy

$$\left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases} .$$

Dla długości zauważmy, że

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \\ &= \sqrt{(\vec{u})_B \cdot (\vec{u})_B} \\ &= \|(\vec{u})_B\| \ , \end{aligned}$$

co kończy dowód. □

11.2 Dopełnienie ortogonalne

Definicja 11.13 (Dopełnienie ortogonalne)**.** Niech $U \subseteq \mathbb{V}$ będzie podzbiorem przestrzeni Euklidesowej (lub unitarnej). Wtedy *dopełnienie ortogonalne* U to:

$$U^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{V} \ : \ \forall_{\vec{w} \in U} \ \vec{v} \perp \vec{w}\}$$

Uwaga. Po ustaleniu bazy ortonormalnej zachodzi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_B \cdot [\vec{v}]_B$, w szczególności $\vec{u} \in U^\perp \iff [\vec{u}]_B \in [U]_B^\perp$, przy czym w drugim przypadku jest to dopełnienie ortogonalne względem standardowego iloczynu skalarnego.

Tym niemniej, niektóre własności nie zachodzą lub też ich dowody są bardziej zrozumiałe w ogólnym przypadku.

Fakt 11.14. *Jeśli $\mathrm{LIN}(B) = \mathbb{W}$ to $\vec{v} \in \mathbb{W}^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{v}$ jest prostopadły do każdego wektora z B.*

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli $\vec{v} \in \mathbb{W}^\perp$ to w szczególności jest prostopadły do każdego wektora z $B \subseteq W$.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle$ dla każdego wektora $\vec{b}_i \in B$. Wtedy dowolne $\vec{w} \in W$ wyraża się jako $\sum_i \alpha_i \vec{b}_i$ i dlatego:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \left\langle \vec{v}, \sum_i \alpha_i \vec{b}_i \right\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i \left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle \\ &= \sum_i \alpha_i \cdot 0 \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

□

Lemat 11.15. *Niech $U \subseteq \mathbb{V}$, gdzie $\mathbb{V}$ jest przestrzenią Euklidesową (lub unitarną). Wtedy*

1. *$U^\perp \leq \mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową;*
2. *$(U^\perp)^\perp \supseteq U$;*

3. $U \cap (U^\perp) \subseteq \{\vec{0}\}$*;*

Dowód.
- Niech $\vec{v}, \vec{v}' \in U^\perp$, czyli
$$\forall_{u \in U} \langle v, u \rangle = \langle v', u \rangle = 0 \ .$$
Dodając te dwie równości uzyskujemy
$$\forall_{u \in U} \langle v + v', u \rangle = 0 \ ,$$
a mnożąc pierwszą przez α:
$$\forall_{u \in U} \langle \alpha v, u \rangle = 0 \ .$$
Czyli $U^\perp$ jest zamknięta na dodawanie i mnożenie przez skalar, oczywiście należy do niej wektor $\vec{0}$, czyli jest podprzestrzenią liniową.
- Tak samo jak w przypadku iloczynu standardowego.
- Niech $\vec{u} \in U \cap U^\perp$. Wtedy $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, bo dla każdego $\vec{v} \in U^\perp$ mamy $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, w szczególnośći dla $\vec{u} = \vec{v}$. Czyli z definicji iloczynu skalarnego mamy $\vec{u} = \vec{0}$. □

Lemat 11.16. *Jeśli* $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ *jest bazą ortonogonalną przestrzeni Euklidesowej lub unitarnej* $\mathbb{V}$*, to*
$$\mathrm{LIN}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)^\perp = \mathrm{LIN}(\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n) \ .$$
W szczególności, jeśli $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$ *to*
$$\dim(\mathbb{W}^\perp) = \dim \mathbb{V} - \dim \mathbb{W} \ .$$

Dowód. Skoro każde z $\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n$ jest prostopadłe do wektorów bazy $\mathrm{LIN}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$, to są prostopadłe do całej rozpostartej przestrzeni $\mathrm{LIN}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ i tym samym
$$\mathrm{LIN}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)^\perp \geq \mathrm{LIN}(\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n) \ .$$
By sprawdzić równość, rozpatrzmy dowolny wektor $\vec{v} \in \mathrm{LIN}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)^\perp$. Ma on reprezentację w bazie B równą
$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle \vec{b}_i \ .$$
Z definicji dopełnienia ortogonalnego $\left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle = 0$ dla $i \leq k$, czyli
$$\vec{v} = \sum_{i=k+1}^{n} \left\langle \vec{v}, \vec{b}_i \right\rangle \vec{b}_i \in \mathrm{LIN}(\vec{b}_{k+1}, \ldots, \vec{b}_n) \ .$$

W drugim punkcie zauważmy, że dla $\mathbb{W}$ można wybrać bazę ortogonalną B (Twierdzenie 11.8), która można rozszerzyć do bazy ortogonalnej $\mathbb{V}$ (Lemat 11.9), z pierwszej części dostajemy wtedy tezę. □

Lemat 11.17. *Niech* $\mathbb{V}$ *będzie skończenie-wymiarową przestrzenią Euklidesową (lub unitarną) oraz niech* $\mathbb{W} \leq \mathbb{V}$*. Wtedy*
- $(\mathbb{W}^\perp)^\perp = \mathbb{W}$.
- $\mathbb{W} + \mathbb{W}^\perp = \mathbb{V}$
- *dla każdego wektora* $\vec{v} \in \mathbb{V}$ *reprezentacja* $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}_\perp$*, gdzie* $\vec{w} \in \mathbb{W}$ *i* $\vec{w}_\perp \in \mathbb{W}^\perp$ *jest jedyna.*

Dowód.
- Wiemy już, że $\mathbb{W} \leq (\mathbb{W}^\perp)^\perp$. Reszta wynika z policzenia wymiaru:
$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{W}^\perp)^\perp &= \dim \mathbb{V} - \dim \mathbb{W}^\perp \\ &= \dim \mathbb{V} - (\dim \mathbb{V} - \dim \mathbb{W}) \\ &= \dim \mathbb{W} \end{aligned}$$

- Ponownie, wynika to z rachunku wymiarów:

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{W}+\mathbb{W}^\perp) &= \dim(\mathbb{W})+\dim(\mathbb{W}^\perp)-\dim(\mathbb{W}\cap\mathbb{W}^\perp)\\ &= \dim(\mathbb{W})+\dim(\mathbb{W}^\perp)\\ &= \dim(\mathbb{W})+(\dim\mathbb{V}-\dim\mathbb{W})\\ &= \dim\mathbb{V}\end{aligned}$$

  Czyli

$$\mathbb{W}+\mathbb{W}^\perp=\mathbb{V}\ .$$

- Niech $B, B_\perp$ to bazy ortogonalne $\mathbb{W}, \mathbb{W}^\perp$, wtedy $B\cup B_\perp$ jest bazą $\mathbb{V}$.

  Załóżmy, że reprezentacja $\vec{v}=\vec{w}+\vec{w}_\perp$, gdzie $w\in\mathbb{W}$ i $\vec{w}_\perp\in\mathbb{W}^\perp$ nie jest jedyna. Wyrażając je jako kombinację wektorów z $B, B_\perp$ dostajemy dwie różne reprezentacje $\vec{v}$ w bazie $B\cup B_\perp$. □

11.3 Rzuty i rzuty prostopadłe.

Definicja 11.18. Niech $\mathbb{W}\leq\mathbb{V}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni Euklidesowej $\mathbb{V}$. Dla wektora $\vec{v}\in\mathbb{V}$ niech $\vec{w}+\vec{w}^\perp$ będzie rozkładem $\vec{v}$ na sumę elementów z $\mathbb{V}$ i $\mathbb{V}^\perp$.

Przyporządkowanie $\vec{v}\mapsto\vec{w}$ nazywamy rzutem prostopadłym na $\mathbb{W}$.

Fakt 11.19. *Niech $P_\mathbb{W}$ będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W}$. Wtedy;*

- *rzut prostopadły P jest jednoznacznie określony*
- $P\vec{v}\in\mathbb{W}$
- $\vec{v}-P\vec{v}\in\mathbb{W}^\perp$
- $P\vec{w}=\vec{w}$ *dla* $w\in\mathbb{W}$
- $P\vec{w_\perp}=\vec{0}$ *dla* $\vec{w_\perp}\in\mathbb{W}^\perp$.

Lemat 11.20. *Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią Euklidesową (unitarną) i $\mathbb{W}\leq\mathbb{V}$. Rzut prostopadły na $\mathbb{W}$ jest zdefiniowany jednoznacznie.*

Niech $P:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ będzie rzutem prostopadłym na $\mathbb{W}$. Jeśli $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_k$ jest bazą ortogonalną $\mathbb{W}$ zaś $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n$: przestrzeni $\mathbb{V}$, to

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{b}_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{b}_i\ .$$

Uwaga. Zauważmy, że skoro $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n$ jest bazą, to to definiuje P na całej przestrzeni $\mathbb{V}$.

Dowód wynika z Lematu 11.16 i Lematu 11.19.

Uwaga. Zauważmy, że z Lematu 11.20 wynika, że aby policzyć rzut prostopadły, musimy jedynie znać bazę ortonormalną $\mathbb{W}$, nie jest potrzebna baza ortonormalna całej przestrzeni $\mathbb{V}$.

Uwaga (Alternatywna (w pełni abstrakcyjna) definicja rzutu prostopadłego). *Rzutem* nazywamy przekształcenie liniowe $P:\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ takie że $P^2=P$. O rzucie P mówimy, że jest *rzutem na podprzestrzeń* $\operatorname{Im}P$.

Rzut jest rzutem *prostopadłym* jeśli dla każdego $\vec{v}$ mamy $P(\vec{v})\perp(\vec{v}-P(\vec{v}))$.

Łatwo sprawdzić, że nasza definicja rzutu prostopadłego jest zgodna w podaną.

11.4 Algorytm Grama-Schmidta ortonormalizacji bazy

Używając terminologii rzutów możemy podać algorytm konstrukcji bazy ortonormalnej (przez ortogonalizację istniejącej bazy).

Dla bazy $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ przestrzeni $\mathbb{V}$ z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$ algorytm (Grama-Schmidta) ortonormalizacji bazy wygląda następująco:

Algorytm 1 Algorytm Gram-Schmidta ortonormalizacji

1: $\vec{v}_1 \leftarrow \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}}$ ▷ Normowanie
2: **for** $i \leftarrow 2 \,..\, n$ **do**
3: $\quad \vec{v}_i \leftarrow \vec{v}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle \, \vec{v}_j$ ▷ Odjęcie rzutu na przestrzeń rozpiętą przez $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}$
4: $\quad$ **if** $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = 0$ **then**
5: $\quad\quad$ **return** Wektory są liniowo zależne.
6: $\quad \vec{v}_i \leftarrow \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{\langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle}}$ ▷ Normowanie

Uwaga. Ostatni krok, w którym ortonormalizujemy kolejne wektory, nie jest w zasadzie potrzebny (i możemy dostać bazę ortogonalną), jednak w takim przypadku musimy zmienić odpowiednio wyrażenie na rzut prostopadły.

Twierdzenie 11.21. *Jeśli układ na wejściu algorytmu Grama-Schmidta był niezależny, to uzyskane wektory są układem ortonormalnym.*

Jeśli układ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i$ był zależny i układ $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}$ był niezależny, to w czasie algorytmu przekształcimy $\vec{v}_i$ na $\vec{0}$.

Dowód. Niech $\vec{v}'_i$ oznacza wektor w czasie działania algorytmu, zaś $\vec{v}_i$ jego wartość na wejściu.

Pokażemy przez indukcję, że po i-tej iteracji pętli mamy

- po odrzuceniu wektorów zerowych, układ $\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_i$ jest ortonormalny;
- dla każdego j mamy $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j) = \mathrm{LIN}(\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_j)$.

Z założenia indukcyjnego układ $\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_{i-1}$ jest ortonormalny, i w takim razie algorytm wykonuje rzut $\vec{v}_i$ na przestrzeń $\mathrm{LIN}(\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_{i-1})$, również z założenia równą $\mathrm{LIN}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1})$. Ta operacje jest poprawnie określona, bo $\vec{v}'_1, \ldots, \vec{v}'_{i-1}$ to układ ortonarmalny. Jeśli $\vec{v}_i \in \mathrm{LIN}(\vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_{i-1})$, to uzyskamy $\vec{v}'_i = 0$. Jeśli nie, to uzyskamy wektor prostopadły do $\mathrm{LIN}(v'_1, \ldots, v'_{i-1})$ i następnie zmienimy jego długość na 1, czyli uzyskany wektor $\vec{v}'_i$ jest ortonormalny.

Co do drugiej części, to zauważmy, że w i-tej iteracji zamieniamy wektor $\vec{v}_i$ na kombinację liniową $\vec{v}_i$ (ze współczynnikime 1) oraz wektorów $v'_1, \ldots, v'_{i-1}$. Czyli nie zmieniamy przestrzeni rozpostartej przez dowolny podciąg wektorów $v'_1, \ldots, v'_j$. □

Przykład 11.22. Dla standardowego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^4$ zortonormalizujemy układ wektorów

$$\{(4,4,-2,0); (1,4,1,0); (5,-4,-7,1)\}$$

i uzupełnimy go do bazy ortonormalnej.

Oznaczmy zadane wektory jako $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Dokonamy ortonormalizacji bazy metodą Grama-Schmidta; niech $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \vec{v}'_3$ to wektory po tym procesie.

Długość wektora $\vec{v}_1$ to to $\sqrt{16+16+4} = 6$, czyli pierwszy wektor ortonormalny z bazy to

$$\vec{v}'_1 = \frac{1}{6} \cdot \vec{v}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right).$$

Liczymy iloczyn skalarny tego wektora ($\vec{v}'_1$) i wektora drugiego ($\vec{v}_2$):

$$\langle \vec{v}'_1, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0 \right); (1,4,1,0) \right\rangle = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3 \ ,$$

i tym samym

$$\vec{v}_2 - 3\vec{v}'_1 = (1,4,1,0) - (2,2,-1,0) = (-1,2,2,0) \ .$$

Jego długość to $\sqrt{1+4+4} = 3$ i dlatego

$$\vec{v}'_2 = \frac{1}{3}(-1,2,2,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) \ .$$

Obliczamy teraz iloczyny skalarne $\langle \vec{v}_1', \vec{v}_3 \rangle$ oraz $\langle \vec{v}_2', \vec{v}_3 \rangle$:

$$\langle \vec{v}_1', \vec{v}_3 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right); (5, -4, -7, 1) \right\rangle = \frac{1}{3}(10 - 8 + 7) = \frac{9}{3} = 3$$
$$\langle \vec{v}_2', \vec{v}_3 \rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right); (5, -4, -7, 1) \right\rangle = \frac{1}{3}(-5 - 8 - 14) = -\frac{27}{3} = -9$$

Obliczamy $\vec{v}_3 - 3\vec{v}_1' + 9\vec{v}_2'$:

$$(5, -4, -7, 1) - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + 9\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = (5 - 2 - 3, -4 - 2 + 6, -7 + 1 + 6, 1) = (0, 0, 0, 1)$$

Wektor ten ma długość 1, czyli

$$\vec{v}_3' = (0, 0, 0, 1).$$

Aby rozszerzyć ten układ wektorów do bazy ortonormalnej, należy dodać do niej jeden wektor (niezależny) i następnie zortonormalizować cały układ. Weźmy wektor $\vec{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$: ma on niewiele współrzędnych i nie wygląda, żeby był liniowo zależny od pozostałych:

$$\langle \vec{v}_1', \vec{v}_4 \rangle = \frac{2}{3}$$
$$\langle \vec{v}_2', \vec{v}_4 \rangle = -\frac{1}{3}$$
$$\langle \vec{v}_3', \vec{v}_4 \rangle = 0$$

Obliczamy $\vec{v}_4 - \frac{2}{3}\vec{v}_1' + \frac{1}{3}\vec{v}_2'$:

$$(1, 0, 0, 0) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) = \left(1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9}, 0 - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}, 0 + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}, 0\right) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 0\right)$$

Długość tego wektora to:

$$\sqrt{\frac{1}{81}(16 + 4 + 16)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Po przemnożeniu dostajemy

$$\vec{v}_4' = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right),$$

który to wektor jest dopełnieniem do bazy ortonormalnej.

Lemat 11.23. *Jeśli baza B powstaje z bazy A przez ortonormalizację Grama-Schmidta, to M_{BA} i M_{AB} są macierzami górnotrójkątnymi. Ponadto mają one dodatnie elementy na przekątnej.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

11.5 Zastosowania: geometria

11.5.1 Reprezentacja przez dopełnienie ortogonalna

Dopełnienie ortogonalne jest dobrym sposobem reprezentacji płaszczyzn/prostych itp.: dla danej płaszczyzny $\mathbb{W}$ reprezentujemy ją jako bazę $\mathbb{W}^\perp$. Reprezentacja ta jest o tyle dobra, że można łatwo przecinać tak zadane przestrzenie: dla $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2$ ich przecięcie to $(\mathbb{W}_1^\perp + \mathbb{W}_2^\perp)^\perp$. Zwartą reprezentację otrzymujemy przez ortonormalizację sumy baz $\mathbb{W}_1^\perp$, $\mathbb{W}_2^\perp$.

Płaszczyzny reprezentowane są w ten sposób jako jeden wektor, często w CADach linie trzyma się jako przecięcie płaszczyzn.

11.5.2 Symetrie

Macierz symetrii względem prostej dość łatwo zadać używając rzutu: symetria względem $\mathbb{W}$ wyraża się jako $2P_{\mathbb{W}} - \mathrm{Id}$.

11.5.3 Regresja liniowa

Załóżmy, że mamy dwie zmienne losowe X, Y (np.: cena mieszkania i powierzchnia mieszkania). Dla uproszczenia zakładamy, że zmienne są unormowane:

wartość oczekiwana mają wartość oczekiwaną równą 0:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0 \ .$$

wariancja mają wariancję równą 1

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y] = 1 \ .$$

Chcemy policzyć „najlepsze” β, takie że $X = \beta Y$. Co to znaczy najlepsze? W tym konkretnym problemie chcemy zminimalizować kwadrat błędu, czyli

$$\mathbb{E}[(X - \beta Y)^2] = \mathrm{Var}[X - \beta Y]$$

(bo obie zmienne mają wartość oczekiwaną 0).

Przypomnijmy sobie, że kowariancja jest iloczynem skalarnym dla zmiennych losowych (o wartości oczekiwanej 0) i tym samym wariancja to kwadrat długości.

Potraktujmy X, Y jako wektory (w odpowiedniej przestrzeni Euklidesowej). Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami możemy przedstawić X jako

$$X = X^{\perp} + X'$$

takie że $X' = \beta' Y$ oraz $X^{\perp} \in Y^{\perp}$, gdzie $\beta' = \mathrm{cov}[X, Y]$ oraz $X^{\perp} = X - \mathrm{cov}[X, Y]Y$.

Wtedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X - \beta Y] &= \left\langle X^{\perp} + \beta' Y - \beta Y, X^{\perp} + \beta' Y - \beta Y \right\rangle \\
&= \left\langle X^{\perp}, X^{\perp} \right\rangle + \left\langle \beta' Y - \beta Y, \beta' Y - \beta Y \right\rangle \\
&= \mathrm{Var}[X^{\perp}] + (\beta' - \beta)^2 \, \mathrm{Var}[Y]
\end{aligned}$$

Pierwszy składnik nie zależy od β zaś drugi jest minimalizowany dla $\beta = \beta' = \mathrm{cov}[X, Y]$.

Co pokazuje np. że dla regresji liniowej X od Y oraz Y od X dostajemy tą samą wartość β.

Rozdział 12

Izometrie, macierze ortogonalne

12.1 Izometrie

Definicja 12.1 (Izometria)**.** Przekształcenie liniowe $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ na przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, nazywamy *izometrią*, jeśli zachowuje iloczyn skalarny, tj. dla każdych dwóch wektorów $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$ zachodzi:

$$\langle F\vec{v}, F\vec{u} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \quad .$$

Przykład 12.2.
- obrót o kąt α (na płaszczyźnie)
- symetria względem prostej
- symetria względem płaszczyzny
- symetria względem punktu

Lemat 12.3. *Przekształcenie F jest izometrią wtedy i tylko wtedy gdy zachowuje długość, tj. dla każdego $\vec{v} \in \mathbb{V}$ mamy $\|F(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.*

Przekształcenie F jest izometrią wtedy i tylko wtedy gdy zachowuje iloczyn skalarny elementów z bazy.

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli F jest izometrią, to w szczególności $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle F(\vec{v}), F(\vec{v}) \rangle$, czyli $\|\vec{v}\| = \|F(\vec{v})\|$.

$\Leftarrow$ Jeśli F zachowuje długość, to zachowuje iloczyn skalarny $\vec{v}$ z $\vec{v}$, tj. dla każdego $\vec{v}$ mamy $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle F(\vec{v}), F(\vec{v}) \rangle$. Podstawiając za wektor $\vec{u} + \vec{v}$ dostajemy:

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle F(\vec{u} + \vec{v}), F(\vec{u} + \vec{v}) \rangle$$

Rozwijając obie strony z liniowości:

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|F(\vec{u})\|^2 + \|F(\vec{v})\|^2 + 2\langle F(\vec{u}), F(\vec{v}) \rangle$$

Ponieważ $\|\vec{u}\| = \|F(\vec{u})\|$ oraz $\|\vec{v}\| = \|F(\vec{v})\|$ dostajemy

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle F(\vec{u}), F(\vec{v}) \rangle \, .$$

Druga część zostanie pokazana na ćwiczeniach. □

12.2 Macierze ortogonalne

Definicja 12.4. Macierz kwadratową nazywamy *ortogonalną*, jeśli jej kolumny są parami ortogonalne oraz są długości 1 (w standardowym iloczynie skalarnym).

Lemat 12.5. *M jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy gdy $M^{-1} = M^T$.*

Dowód. Zauważmy, że wyraz ij iloczynu $M^T M$ to standardowy iloczyn skalarny i-tej oraz j-tej kolumny.

$\Rightarrow$ Jeśli M jest ortogonalna, to wyraz ij iloczynu $M^T M$ wynosi 1 dla $i = j$ oraz 0 dla $i \neq j$. Czyli $M^T M = \mathrm{Id}$.

$\Leftarrow$ Jeśli $M^{-1} = M^T$ to $M^T M = \mathrm{Id}$ i tym samym iloczyn i-tej oraz j-tej kolumny M to 0 dla $i \neq j$ oraz 1 dla $i = j$. Czyli kolumny stanowią układ ortonormalny. □

Lemat 12.6. *Macierze ortogonalne są zamknięte na mnożenie, transponowanie i na branie macierzy odwrotnej.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 12.7. *M jest macierzą ortogonalną wtedy i tylko wtedy gdy indukowane przez nią przekształcenie liniowe $L_M : \vec{V} \mapsto M\vec{V}$ jest izometrią (dla standardowego iloczynu skalarnego).*

Dowód. $\Leftarrow$ Z Lematu 12.3 wystarczy pokazać, że L_M zachowuje iloczyn skalarny elementów z bazy standardowej. Dla $\vec{E}_i, \vec{E}_j$ wiemy, że $\vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$ jest równy 1 dla $i = j$ oraz 0 dla $i \neq j$.

Niech $M = [M_1|M_2|\dots|M_k]$. Wtedy $M\vec{E}_i \cdot M\vec{E}_j = M_i \cdot M_j$ i z tego, że M jest ortogonalna wnioskujemy, że ten iloczyn wynosi 1 dla $i = j$ oraz 0 dla $i \neq j$.

$\Rightarrow$ Skoro L_M jest izometrią, to

$$M_i \cdot M_j = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } i \neq j \\ 1 & \text{jeśli } i = j \end{cases}$$

i tym samym M jest ortogonalna. □

Lemat 12.8. *Niech $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ będzie bazą ortonormalną.*

F jest izometrią $\iff$ $M_{BB}(F)$ jest macierzą ortogonalną. W szczególności, $M_{BB}(F)^{-1}$ to $M_{BB}(F)^T$.

Dowód. Niech

$$M_{BB}(F) = M = [[\vec{F}(b_1)]_B| \cdots |[F(\vec{b}_n)]_B]$$

Rozpatrzmy standardowy iloczyn skalarny i-tej oraz j-tej kolumny $M_{BB}(F)$, tj.

$$[F(\vec{b}_i)]_B \cdot [F(\vec{b}_j)]_B \ .$$

Wtedy

$$[F(\vec{b}_i)]_B \cdot [F(\vec{b}_j)]_B = \left\langle F(\vec{b}_i), F(\vec{b}_j) \right\rangle \qquad \text{Z Lematu 11.12}$$

Jeśli F jest izometrią, to prawa strona jest równa:

$$= \left\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \right\rangle$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{jeśli } i \neq j \\ 1 & \text{jeśli } i = j \end{cases}$$

Czyli $M_{BB}(F)$ jest macierzą ortonormalną. Z drugiej strony, jeśli $M_{BB}(F)$ jest ortonormalna, to lewa strona tej równośći jest równa

$$= \begin{cases} 0 & \text{jeśli } i \neq j \\ 1 & \text{jeśli } i = j \end{cases}$$

Czyli F jest izometrią.

□

Rozdział 13

Macierze dodatnio określone: zadawanie iloczynu skalarnego przez macierz

Jak zadawać iloczyn skalarny na przestrzeni? Dla zadanej bazy $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ iloczyn skalarny jest jednoznacznie zadany przez macierz $M = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, gdzie

$$a_{ij} = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle$$

Wtedy

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (\vec{u})_B^T M (\vec{v})_B$$

(Wystarczy sprawdzić z liniowości dla $\vec{u} = \vec{v}_i$ oraz $\vec{v} = \vec{v}_j$).

Definicja 13.1 (Macierz iloczynu skalarnego, macierz Grama)**.** Dla bazy $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ oraz iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ określamy macierz tego iloczynu w bazie B jako

$$M^B = (\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$$

Lemat 13.2. *Niech B: baza przestrzeni z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Wtedy*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = (\vec{u})_B^T M^B (\vec{v})_B$$

Dowód wynika z bardziej ogólnych własności.
Popatrzmy na ten problem ogólniej.

Definicja 13.3 (Funkcjonał dwuliniowy, forma dwuliniowa)**.** Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F}$.

Funkcja $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ jest funkcjonałem dwuliniowym (formą dwuliniową), jeśli jest liniowa po każdej współrzędnej, tj.:

- $F(\alpha\vec{u}, \vec{v}) = \alpha F(\vec{u}, \vec{v})$;
- $F(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = F(\vec{u}, \vec{v}) + F(\vec{u}', \vec{v})$;
- $F(\vec{u}, \alpha\vec{v}) = \alpha F(\vec{u}, \vec{v})$;
- $F(\vec{u}, \vec{v} + \vec{v}') = F(\vec{u}, \vec{v}) + F(\vec{u}, \vec{v}')$.

Lemat 13.4. *Niech F będzie funkcjonałem dwuliniowym a $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ bazą przestrzeni $\mathbb{V}$. Wtedy F jest jednoznacznie zadany przez macierz*

$$M^B(F) = (F(\vec{v}_i, \vec{v}_j))_{i,j=1,\ldots,n} \ .$$

Co więcej,

$$[F(\vec{u}, \vec{v})] = [\vec{u}]_B^T M^B(F) [\vec{v}]_B$$

W szczególności, dla dwóch funkcjonałów dwuliniowych F, G zachodzi $F = G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $M^B(F) = M^B(G)$.

Dowód. Niech $\vec{v} = \sum_i \alpha_i \vec{v}_i, \vec{u} = \sum_i \beta_i \vec{v}_i$ mamy:

$$\begin{aligned} F(\vec{v}, \vec{u}) &= F(\sum_i \alpha_i \vec{v}_i, \sum_j \beta_j \vec{v}_j) \\ &= \sum_i \alpha_i \beta_j F(\vec{v}_i, \vec{v}_j) \end{aligned}$$

czyli faktycznie wartość F jest jednoznacznie zadana przez M^B.

Rozważmy $[\vec{u}]_B^T M^B(F)[\vec{v}]_B$. Jest to też funkcja dwuliniowa i obserwacji powyżej wystarczy sprawdzić, że $F(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = [\vec{v}_i]_B^T M^B(F)[\vec{v}_j]_B$:

$$[\vec{v}_i]_B^T M^B(F)[\vec{v}_j]_B = \vec{E}_i^T M^B(F) \vec{E}_j \tag{13.1}$$

$$= M^B(F)_{ij} \tag{13.2}$$

$$= F(\vec{v}_i, \vec{v}_j) \tag{13.3}$$

co pokazuje tezę. □

Lemat 13.5. *Jeśli F jest funkcjonałem dwuliniowym, zaś A, B są dwiema bazami, to*

$$M^B(F) = M_{BA}^T M^A(F) M_{BA} \ ,$$

gdzie M_{BA} to macierz zmiany bazy z B do A.

Dowód. Oznaczmy $M^B(F) = M^B$ i $M^A(F) = M^A$.

Niech $B = \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Funkcje po obu stronach równości sa funkcjonałami dwuliniowymi na $\mathbb{F}^n$, czyli wystarczy sprawdzić równość na bazach, czyli na $\{[\vec{v}_i]_B\}_{i=1,\ldots,n}$, co jest prostym rachunkiem:

$$\begin{aligned} (\vec{v}_i)_B^T M^B (\vec{v}_j)_B &= \vec{E}_i^T M^B \vec{E}_j \\ &= (M^B)_{i,j} \\ &= F(\vec{v}_i, \vec{v}_j) \end{aligned}$$

□

Jako wniosek otrzymujemy:

Wniosek 13.6. Niech A, B to dwie bazy przestrzeni Euklidesowej. Wtedy

$$M^B = M_{BA}^T M^A M_{BA} \ ,$$

gdzie M_{BA} to macierz zmiany bazy.

Fakt 13.7. *Dla bazy ortnormalnej B dla iloczynu skalarnego $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mamy $M^B = \mathrm{Id}$.*

Dowód. Wyraz i, j macierzy M^B to iloczyn skalarny i-tego oraz j-tego wektora dla $i = j$. Czyli $M^B = \mathrm{Id}$. □

Definicja 13.8 (Macierz dodatnio określona)**.** Macierz M wymiaru $n \times n$ jest *dodatnio określona*, jeśli funkcja $\langle \cdot, \cdot \rangle : (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ określona jako

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u}^T M \vec{v}$$

jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$.

Dla jakich macierzy to jest dobra definicja? Na pewno macierz musi być symetryczna. Tak zadana funkcja na pewno jest liniowa po obu argumentach. Tak w zasadzie to chodzi o to, żeby zachodziło

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0.$$

Uwaga. Jeśli to jest iloczyn skalarny, to dla bazy standardowej E dla $\mathbb{R}^n$ mamy $M^E = M$.

Fakt 13.9. *Macierz M jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy gdy:*

1. *jest symetryczna oraz*
2. *dla każdego wektora $\vec{v} \neq 0$ zachodzi*

$$\vec{v}^T M \vec{v} > 0 \ .$$

Lemat 13.10. *M jest dodatnio określona $\iff$ $M = A^T A$ dla pewnej odwracalnej macierzy A.*
Takie A można efektywnie uzyskać z dodatnio określonej symetrycznej macierzy M.
Co więcej, istnieje takie A, które jest górno-trójkątne i je również można efektywnie uzyskać.

Dowód. $\Leftarrow$ Jeśli $M = A^T A$ to $M^T = (A^T A)^T = A^T A$, czyli jest symetryczna.
Zaś
$$\vec{V}^T M \vec{V} = \vec{V}^T A^T A \vec{V} = (A\vec{V})^T (A\vec{V}) \ .$$
Ponieważ $\vec{V} \neq \vec{0}$ oraz A jest odwracalna, to $A\vec{V} \neq \vec{0}$ i dlatego ma choć jedną niezerową współrzędną i $(A\vec{V})^T (A\vec{V}) > 0$ (bo zawiera kwadrat tej współrzędnej).
$\Rightarrow$ Skoro M jest dodatnio określona, to wyznacza iloczyn skalarny. Liczymy bazę ortonormalną B dla tego iloczynu. Wyrażamy w niej ten iloczyn, wtedy $M^B = \mathrm{Id}$. Wyrażamy $M = M^E$ przy pomocy M^B:

$$\begin{aligned} M &= M^E \\ &= M_{EB}^T M^A M_{EB} \\ &= M_{EB}^T M_{EB} \ . \end{aligned}$$

Aby pokazać, że A jest górno-trójkątna, skorzystamy z Lematu 11.23, który pokazuje, że bazy A powstałej jako ortonormalizacja bazy E macierz M_{EA} jest górnotrójkątna. □

Twierdzenie 13.11 (Rozkład Cholesky'ego)**.** *Dla macierzy dodatnio określonej M istnieje jedyne A górnotrójkątne o dodatnich elementach na przekątnej, takie że $M = A^T A$.*
Taką reprezentację nazywamy rozkładem Cholesky'ego*, co więcej, można ją efektywnie wyliczyć.*

Algorytm wyliczający taką macierz jest zadaniem na ćwiczenia. Algorytm ten pokazuje też jedyność takiej macierzy.
Istnieją też inne wydajne sposoby sprawdzania, czy macierz jest dodatnio określona.
Będziemy korzystać z prostego faktu (Lemat i dowód pominięty na wykładzie):

Lemat 13.12. *Macierz M jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje baza $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_n$ taka że*

- *dla $i \neq j$ mamy $\vec{B}_i^T M \vec{B}_j = 0$;*
- *dla każdego i mamy $\vec{B}_i^T M \vec{B}_i = 1$.*

Innymi słowy, istnieje „baza ortonormalna" dla „iloczynu skalarnego" zadanego przez M.

Dowód. $\Leftarrow$ Jeśli M jest dodatnio określona, to zadane iloczyn skalarny, dla którego istnieje baza ortonormalna $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_n$; ta baza spełnia warunki zadania.
$\Rightarrow$ Niech F_M będzie formą dwuliniową zadaną przez M i M^A oznacza macierz tej formy w bazie A. Oczywiście $M^E = M$, gdzie E to baza standardowa.
Niech $B = (\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_n)$ będzie bazą jak w treści zadania. Wtedy $M^B = \mathrm{Id}$ i w takim razie
$$M = M^E = M_{EB}^T M^B M_{EB} == M_{EB}^T M_{EB}$$
i tym samym M jest dodatnio określona. □

Dla macierzy M niech M_k oznacza macierz $k \times k$ która jest „w lewym górnym rogu" macierzy M.

Twierdzenie 13.13 (Kryterium Sylvestera)**.** *Symetryczna macierz M jest dodatnio określona $\iff$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ macierz M_k spełnia $\det(M_k) > 0$.*

Dowód dla zainteresowanych, nie został przedstawiony na wykładzie. $\Leftarrow$ Popatrzmy na macierz M_k oraz na przestrzeń $\mathbb{V}_k$ rozpiętą przez pierwsze k wektorów bazowych $\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_k$. Wtedy M_k to macierz iloczynu skalarnego dla przestrzeni $\mathbb{V}_k$. Czyli M_k jest dodatnio określona i w związku z tym $M_k = A^T A$ dla macierzy odwracalnej i $|M_k| = |A|^2 > 0$.
$\Rightarrow$ Rozważamy funkcjonał dwuliniowy zadany przez M:
$$F(\vec{U}, \vec{V}) \mapsto \vec{U}^T M \vec{V} \ .$$

Skorzystamy z Lematu 13.12: wskażemy bazę B taką, że $M^B(F) = \mathrm{Id}$.

Dowód przebiega indukcyjnie: dla kolejnych $k = 1, \ldots$ rozpatrujemy macierz M_k i wskazujemy dla niej bazę $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_k$, przy czym wektory $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_{k-1}$ są wektorami dla macierzy M_{k-1}. Dla ułatwienia rozpatrujemy też funkcję dwuliniową F_k, czyli F obcięte do przestrzeni $\mathrm{LIN}(\vec{E}_1, \ldots, \vec{E}_k)$

Dla $k = 1$ teza oczywiście zachodzi, bo

$$F_1(\vec{E}_1, \vec{E}_1) = M_{1,1} = \det M_1 > 0 \ .$$

Pozostaje unormować $\vec{E}_1$, co daje $\vec{B}_1$ o żądanych własnościach.

Załóżmy, że mamy już wyznaczone wektory $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_k$, chcemy wyznaczyć wektor $\vec{B}_{k+1}$. Bierzemy wektor $\vec{E}_{k+1}$ (który jest niezależny od $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_k$) i „ortonormalizujemy" go do poprzednich wektorów:

$$\vec{B}'_{k+1} = \vec{E}_k - \sum_{i=1}^{k} F(\vec{B}_i, \vec{E}_k)\vec{B}_i$$

Ponieważ $\vec{E}_{k+1}$ jest niezależny od $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_k$, mamy, $\vec{B}'_{k+1} \neq \vec{0}$. Łatwo sprawdzić, że $F(\vec{B}_i, \vec{B}'_{k+1}) = 0$ dla $1 \leq i \leq k$ (czyli $\vec{B}'_{k+1}$ jest „ortogonalny" do pozostałych wektorów):

$$\begin{aligned} F(\vec{B}_i, \vec{B}'_{k+1}) &= F\left(B_i, \vec{E}_{k+1} - \sum_{j=1}^{n-1} F(\vec{B}_j, \vec{E}_{k+1}) \cdot \vec{B}_j\right) \\ &= F\left(\vec{B}_i, \vec{E}_{k+1}\right) - \sum_{j=1}^{k} F(\vec{B}_j, \vec{E}_{k+1}) F\left(\vec{B}_i, \vec{B}_j\right) \end{aligned}$$

Jako że $F(\vec{B}_i, \vec{B}_j)$ wynosi 0 dla $i \neq j$ oraz 1 dla $i = j$:

$$\begin{aligned} F(\vec{B}_i, \vec{B}'_{k+1}) &= F\left(\vec{B}_i, \vec{E}_{k+1}\right) - F(\vec{B}_i, \vec{E}_{k+1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nie wiadomo jednak, czy $F(\vec{B}'_{k+1}, \vec{B}'_{k+1}) > 0$?, co jest potrzebne do normalizacji $\vec{B}'_{k+1}$ i uzyskania $\vec{B}_{k+1}$.

Niech B oznacza układ $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_k, \vec{E}_{k+1}$, zaś B' układ $\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_k, \vec{B}'_{k+1}$ i niech E oznacza bazę standardową. Rozpatrzmy F (formalnie obcięte do przestrzeni rozpostartej przez te układy). Wtedy

$$M^E(F_{k+1}) = M_{k+1} = M_{EB'}^T M^{B'}(F_{k+1}) M_{EB'}$$

W szczególności

$$0 < |M_{k+1}| = |M_{EB'}|^2 |M^{B'}(F_{k+1})|$$

przy czym $M^{B'}(F_{k+1})$ jest macierzą diagonalną, jej ostatnim elementem jest $F(\vec{B}'_{k+1}, \vec{B}'_{k+1})$ a poza tym na przekątnej są same 1: są to wartości $F(\vec{B}_i, \vec{B}_i) = 1$ dla $i \leq k$. Czyli

$$F(\vec{B}'_{k+1}, \vec{B}'_{k+1}) > 0$$

i po unormowaniu do $\vec{B}_{k+1}$ dostajemy tezę. □

Do charakteryzacji macierzy dodatnio określonych można też podejść inaczej — od strony wartości własnych:

Twierdzenie 13.14. *Symetryczna macierz liczb rzeczywistych M jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy ma same dodatnie wartości własne.*

Dodatnio-określoną macierz (liczb rzeczywistych) można „spierwiastkować":

Wniosek 13.15. Dla dodatnio określonej macierzy liczb rzeczywistych M istnieje macierz N, taka że $M = N^2$.

Dowód. Niech $M = A^{-1}DA$, gdzie D jest macierzą przekątniową, ma ona same dodatnie wartości $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na przekątnej. Weźmy D': przekątniową o elementach $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ na przekątnej i macierz $N = A^{-1}D'A$. Wtedy $N^2 = M$. □

13.1 PCA raz jeszcze

Przypomnijmy:

Na wejściu otrzymujemy kolekcję (m) zdjęć twarzy ludzi, traktujemy je jako wektory wymiaru $n = 256 \cdot 256$ z $\mathbb{R}^n$. Na wszystkie razem traktujemy jako macierz M wymiaru $n \times m$. Obrazy są uśrednione, tzn. dla każdego wektora zakładamy, że $\sum_i v_i = 0$.

Niech $\vec{M}_1, \ldots, \vec{M}_m$ będą wektorami kolumnowymi M, oznaczmy je przez B. Traktujemy je jak zmienne losowe: indeks odpowiada zdarzeniu elementarnemu, zakładamy, że wszystkie są tak samo prawdopodobne. Wtedy $M_i \cdot M_j = n \cdot \mathrm{cov}(M_i, M_j)$. Czyli kowariancja to przeskalowany standardowy iloczyn skalarny na tych wektorach. Nie przejmujemy się tą stałą, będziemy pisać zamiennie o (standardowym) iloczynie skalarnym i kowariancji.

Chcemy wybrać $\vec{V}$ długości 1, taki że suma kwadratów długości rzutów $\vec{M}_1, \ldots, \vec{M}_m$ na $\vec{V}$ jest maksymalna; te kwadraty długości rzutów to wariancje rzutów. Zapisując, chcemy wybrać $\vec{V}$ tak by zmaksymalizować

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}((\vec{M}_i \cdot \vec{V})\vec{V}) \cdot ((\vec{M}_i \cdot \vec{V})\vec{V}) &= \sum_{i=1}^{m}(\vec{M}_i \cdot \vec{V})^2 \vec{V} \cdot \vec{V} \\ &= \sum_{i=1}^{m}(\vec{M}_i \cdot \vec{V})^2\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\vec{M}_i \cdot \vec{V}$ to kolejne wiersze wektora $M^T\vec{V}$ i w takim razie suma ich kwadratów to

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(\vec{M}_i \cdot \vec{V})^2 &= (M^T\vec{V})^T(M^T\vec{V}) \\ &= \vec{V}^T(MM^T)\vec{V}\end{aligned}$$

Macierz MM^T nie jest dodatnio określona, ale ma wiele podobnych własności, które pokazuje się analogicznie jak własności macierzy dodatnio określonych:

- ma bazę złożoną z ortonormalnych wektorów własnych (bo jest symetryczna)
- nie ma ujemnych wartości własnych

Niech $\vec{V}_1, \ldots, \vec{V}_n$ będzie taką bazą dla wartości własnych $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Niech $\vec{V} = \sum_i \alpha_i \vec{V}_i$, wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(\vec{M}_i \cdot \vec{V})^2 &= \vec{V}^T(MM^T)\vec{V} \\ &= (\sum_i \alpha_i \vec{V}_i^T)MM^T(\sum_j \alpha_j \vec{V}_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j \vec{V}_i^T MM^T \vec{V}_j \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j \vec{V}_i^T(\lambda_j \vec{V}_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j\lambda_j \vec{V}_i^T \vec{V}_j\end{aligned}$$

ale

$$\vec{V}_i^T\vec{V}_j = \begin{cases}0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j\end{cases}$$

czyli

$$\sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j\lambda_j \vec{V}_i^T\vec{V}_j = \sum_i \alpha_i^2\lambda_i$$

Ponieważ $\sum_i \alpha_i^2 = 1$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jest ciągiem malejącym, suma jest maksymalizowana dla $\alpha_1 = 1$ i pozostałych współczynników równych 1.

Część II

Algebra Abstrakcyjna

Rozdział 14

Grupy

14.1 Automorfizmy

Definicja 14.1 (Grupa przekształceń (automorfizmów) obiektu)**.** Dla danego z obiektu kombinatorycznego S jego grupa przekształceń (symetrii, automorfizmów) $G = \mathrm{Aut}(S)$ powinna spełniać następująco warunki

- przekształcenie identycznościowe e jest w G
- jeśli $\varphi_1, \varphi_2 \in G$ to te przekształcenia można *złożyć* uzyskując $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \in G$
- dla każdego $\varphi \in G$ istnieje φ^{-1} takie że $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = e$

Przykład 14.2.

1. kwadrat i jego obroty
2. kwadrat i jego symetrie
3. dwudziestościan foremny i jego obroty
4. macierz $n \times n$ i mnożenie przez macierze odwracalne
5. macierz $n \times n$ i mnożenie przez macierze odwracalne o wyznaczniku 1
6. macierz $n \times n$ i mnożenie przez macierze odwracalne o module wyznacznika równym 1
7. $\mathbb{Z}$ i dodawania elementów z $\mathbb{Z}$
8. $\mathbb{Z}_p$ i dodawanie elementów z $\mathbb{Z}_p$
9. $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ z mnożeniem przez niezerowe elementy w $\mathbb{Z}_p$
10. X i bijekcje z X w X
11. zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ i jego permutacje
12. $2n$-kąt foremny i jego symetrie
13. $2n$-kąt foremny i jego obroty

14.2 Grupa

Abstrahujemy od obiektu. Same przekształcenia.

Definicja 14.3 (Grupa)**.** Zbiór $(G, \cdot)$, gdzie $\cdot : G \times G \to G$ jest działaniem dwuargumentowym jest *grupą*, gdy:

łączność działanie $\cdot$ jest łączne;

element neutralny istnieje element neutralny e taki że dla każdego $g \in G$ mamy $ge = eg = g$;

element odwrotny dla każdego $g \in G$ istnieje g^{-1} spełniający $g^{-1}g = gg^{-1} = e$.

Jeśli $\cdot$ jest przemienne, to mówimy o grupie *przemiennej* (*abelowej*).

Uwaga. Alternatywnie możemy zdefiniować grupę tak, że ma ona dodatkowo jedną operację unarną: $^{-1} : G \to G$ (branie elementu odwrotnego) oraz jedną stałą: e. Te operacje mają spełniać warunki podane w Definicji 14.3.

Można pokazać, że:

Lemat 14.4.
- *Element odwrotny w grupie G jest jedyny.*
- *Element prawostronnie odwrotny jest też lewostronnie odwrotny.*
- *Identyczność jest jedyna.*
- *Równanie $ax = b$ oraz $xa = b$ mają dokładnie jedno rozwiązanie.*

Przykład 14.5.
- $\{1, 3, 5, 7\}$ z mnożeniem mod 8 [Grupa Kleina]
- obroty kwadratu
- symetrie kwadratu
- obroty dwudziestościanu foremnego
- odwracalne macierze $n \times n$ (z mnożeniem)
- macierze $n \times n$ o wyznaczniku 1 (z mnożeniem)
- macierze $n \times n$ o module wyznacznika równym 1 (z mnożeniem)
- ortogonalne macierze $n \times n$ (z mnożeniem)
- $\mathbb{Z}$ z dodawaniem
- $\mathbb{Z}_n$ z dodawaniem modulo n
- $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ z mnożeniem (p — liczba pierwsza)
- bijekcje z X w X
- permutacje zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$
- obroty i symetrie $2n$-kąta foremnego
- obroty $2n$-kąta foremnego

Uwaga 14.6. Teoria grup została rozwinięta przy okazji rozwiązywania równań stopnia ≥ 5. Ale prawdziwa eksplozja nastąpiła w czasie drugiej wojny światowej i związków z kryptografią. Do dziś stanowi podstawę przy projektowaniu i analizy sposobów szyfrowania oraz kryptoanalizy.

14.2.1 Półgrupy

W ogólności rozważa się też monoidy (półgrupy), w których nie zakładamy istnienia elementu odwrotnego (elementu odwrotnego ani identyczności).

14.3 Tabelka działań (mnożenia)

Definicja 14.7 (Tabela działań)**.** *Tabela działań* dla grupy G podaje wprost wszystkie możliwe $|G|^2$ wyników mnożenia.

Przykład 14.8 (Tabela działań dla grupy Kleina).

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Fakt 14.9.
- *Każdy wiersz i każda kolumna w tabelce działań jest permutacją elementów z G.*
- *Dwa różne wiersze (dwie różne kolumny) są różne.*
- *Musi być dokładnie jeden wiersz (kolumna) w której permutacja jest identycznością.*

Definicja 14.10 (Iloczyn kartezjański grup; produkt prosty)**.** Dla grup G, H przez $G \times H$ oznaczamy grupę na zbiorze $G \times H$ i działaniu po współrzędnych

$$(g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh') \ .$$

Definicję rozszerzamy naturalnie na iloczyn kartezjański dowolnej ilości grup.

14.4 Homomorfizm, Izomorfizm

Definicja 14.11 (Homomorfizm, izomorfizm grup)**.** Operację $\varphi : \mathbb{G} \mapsto \mathbb{H}$ nazywamy *homomorfizmem grup*, jeśli zachowuje działanie grupowe, tj. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

φ jest *izomorfizmem*, jeśli istnieje φ^{-1} które jest przekształceniem odwrotnym i homomorfizmem (w szczególności: φ, φ^{-1} są bijekcjami).

Przykład 14.12.
- Izomorfizm: grupa Kleina oraz $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- Homomorfizm: macierze odwracalne rozmiaru $n \times n$ nad $\mathbb{F}$ $M \mapsto \det M$
- Homomorfizm: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ na pierwszą współrzędną.
- Homomorfizm: Macierze odwracalne w macierze o wyznaczniku ± 1: $\varphi(M) = M/|\det(M)|$.
- Homomorfizm: Macierze o wyznaczniku o module 1 w macierze o wyznaczniku 1: $\varphi(M) = M/\det(M)$.
- Homomorfizm: Obroty i symetrie kwadratu w $\mathbb{Z}_2$: czy zmieniają orientację, czy nie (tzn. symetrie w -1, obroty w 1).

Lemat 14.13. *Homomorfizm przeprowadza element neutralny (odwrotny) w neutralny (odwrotny).*

Dowód. Wynika to z tego, że homomorfizm zachowuje równania: jeśli krotka $(a_1, \ldots, a_n)$ elementów z G spełnia jakieś równania, to $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)$ też spełnia analogiczne równanie. Wtedy identyczność to jedyny element spełniający równanie $x^2 = x$. Natomiast para a, a^{-1} spełnia równanie $xy = e$ (i jeśli jakaś para jest spełnia to jest parą elementów do siebie odwrotnych). Zauważmy, że formalnie e w obu grupach to inny element; aby ominąć tę trudność możemy rozszerzyć naszą parę o element z i dopisać równanie $z^2 = z$ (czyli z jest identycznością w obu grupach) i początkowe równanie zastąpić przez $xy = z$.

Zwykle jednak postępujemy tak jakby branie elementu odwrotnego oraz element neutralny były dodatkowymi operacjami w grupie. □

14.5 Rząd elementu

Definicja 14.14 (Potęga, rząd)**.** Potęgą elementu a nazywamy dowolny element postaci a^n, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Dla $n = 0$ oznacza on e, dla $n > 1$: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ razy}}$, dla $n < 0$: $a^n = (a^{-1})^{-n}$.

Rząd elementu to najmniejsza dodatnia potęga n taka że $a^n = e$. Rząd elementu jest *nieskończony* (*nieokreślony*), jeśli nie ma takiego skończonego n.

Rząd grupy to ilość jej elementów (może, ale nie musi, być skończony).

Fakt 14.15. *Rząd a i rząd a^{-1} jest taki sam.*

Fakt 14.16. *W grupie skończonej każdy element ma rząd skończony.*

Lemat 14.17. *Jeśli $a \in G$ ma skończony rząd p, to $a^\ell = e \iff p|\ell$.*

Dowód. $\Leftarrow$ jest jasna.

$\Rightarrow$: załóżmy, że tak nie jest. Bez zmniejszenia ogólności możemy rozpatrzyć tylko dodatnie ℓ. Rozpatrzmy najmniejsze takie ℓ, że $a^\ell = e$ oraz $p \nmid \ell$. Wtedy $\ell > p$, bo inaczej p nie jest rzędem a. Ale wtedy $a^{\ell - p} = e$, sprzeczność z minimalnością ℓ. □

14.6 Podgrupy

Definicja 14.18 (Podgrupa)**.** H jest podgrupą G, co zapisujemy jako $H \leq G$, gdy $H \subseteq G$ oraz jest grupą.

Uwaga. Nie wystarczy, że $H \subseteq G$ i że jest zamknięta na działanie: może nie zawierać elementu odwrotnego! (np. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ jest zamknięte na działanie, ale nie ma elementów odwrotnych.)

Uwaga. Dla alternatywnej definicji (z dodatkową operacją branie elementu odwrotnego oraz elementem neutralnym) już wystarczy, bo wtedy to są formalnie działania.

Przykład 14.19.
- Grupa obrotów $2n$ kąta w grupie symetrii $2n$ kąta.
- Dodawanie liczb parzystych w $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_2 \times \{0\}$ w $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- Macierze o wyznaczniku o module 1 w macierzach odwracalnych.
- Macierze o wyznaczniku 1 w macierzach odwracalnych.
- Macierze ortogonalne w macierzach odwracalnych.

Lemat 14.20. *W grupie skończonej G niepusty zbiór H jest podgrupą wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięty na działanie.*

W grupie, w której rząd każdego elementu jest skończony, niepusty podzbiór H jest podgrupą wtedy i tylko wtedy gdy jest zamknięty na działanie.

Dowód. Zauważmy, że jeśli element a ma rząd k, to $a^{-1} = a^{k-1}$. W naszym przypadku oznacza to, że jeśli zbiór jest zamknięty na działanie, to jest też zamknięty na branie element odwrotnego i zawiera e. □

Definicja 14.21 (Generowanie)**.** Dla grupy G oraz zbioru $A \subseteq G$ podgrupa generowana przez A, oznaczana jako $\langle A \rangle$, to najmniejsza podgrupa G zawierająca A. W takim wypadku mówimy, że A to zbiór *generatorów* tej podgrupy.

Przykład 14.22.
- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$
- $\mathbb{Z}_6 = \langle 1 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$
- grupa obrotów kwadratu jest generowana przez obrót o 90^o
- grupa obrotów i symetrii kwadratu jest generowana przez obrót o 90^o i dowolną symetrię.

Fakt 14.23. $(x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k})^{-1} = (x_k^{-1})^{z_k} (x_{k-1}^{-1})^{z_{k-1}} \cdots (x_1^{-1})^{z_1}$.

Prosty dowód pokazany zostanie na ćwiczeniach.

Definicja 14.24 (Postać zredukowana)**.** Niech $a_1, \ldots, a_k \in G$. O iloczynie $a_1^{\ell_1} a_2^{\ell_1} \cdots a_k^{\ell_k}$ mówimy, że jest w *postaci zredukowanej*, jeśli $a_i \notin \{a_{i+1}^{-1}, a_{i+1}\}$ dla każdego możliwego i oraz $\ell_i \neq 0$ dla każdego i.

Uwaga. Zauważmy, że jest możliwe, że zachodzą jakieś redukcje pomiędzy $a_i^{\ell_i}$ oraz $a_{i+1}^{\ell_{i+1}}$ czy możliwe jest wyrażenie jakiegoś podciągu w inny sposób.

Np. dla $a_1 = a^2$ oraz $a_2 = a^3$ ciąg $a_1^3 a_2^{-2}$ jest w postaci zredukowanej, pomimo tego, że $a_1^3 a_2^{-2} = e$.

Lemat 14.25. *Rozważmy ciągu elementów $a_1^{\ell_1} a_2^{\ell_1} \cdots a_k^{\ell_k}$ oraz następujące reguły przepisywania:*

- $a_i^{\ell_i} a_{i+1}^{\ell_{i+1}} \to a_i^{\ell_i + \ell_{i+1}}$, *jeśli* $a_i = a_{i+1}$
- $a_i^{\ell_i} a_{i+1}^{\ell_{i+1}} \to a_i^{\ell_i - \ell_{i+1}}$, *jeśli* $a_i = a_{i+1}^{-1}$
- $a_i^0 \to e$

Wtedy uzyskane końcowy ciąg $a_{i_1}^{\ell'_1} a_{i_2}^{\ell'_j} \cdots a_{i_j}^{\ell'_j}$:

- *jest w postaci zredukowanej*

- *nie zależy od kolejności wykonania redukcji (utożsamiamy a^k z $(a^{-1})^{-k}$).*
- $a_1^{\ell_1} a_2^{\ell_2} \cdots a_k^{\ell_k} = a_{i_1}^{\ell'_1} a_{i_2}^{\ell'_2} \cdots a_{i_j}^{\ell'_j}$.

Ponadto, $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_j}$ jest podciągiem $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Dowód. Łatwo sprawdzić, że proces skracania się zakończy (skraca długość ciągu) oraz że przepisywanie nie zmienia elementu grupy, również ostatnia własność wynika wprost z definicji redukcji.

Techniczne i ciut żmudne jest pokazanie, że wynik nie zależy od kolejności wykonania skreśleń. (Dla tych, co znają pojecia: że ten system przepisywania termów jest silnie konfluentny). Dowód pominiemy. □

Lemat 14.26. *Dla zbioru generatorów X podgrupa $\langle X \rangle$ to dokładnie zbiór elementów postaci:*

$$\langle X \rangle = \{x_1^{z_1} x_2^{z_2} \cdots x_k^{z_k} \ : \ k \geq 0,\, x_1, \ldots, x_k \in X,\, z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{Z}\} \ ,$$

bez zmniejszenia ogólności można dodatkowo założyć, że wszystkie elementy są w postaci zredukowanej.

Dowód. W oczywisty sposób $\langle X \rangle$ zawiera wszystkie elementy tej postaci.

W drugą stronę należy pokazać, że tak zadany zbiór jest grupą; co też jest proste, bo jest zamknięty na złączanie ciągów elementów oraz na branie elementów odwrotnych. □

14.7 Grupa cykliczna

Definicja 14.27 (Grupa cykliczna)**.** Grupa G jest *grupą cykliczną*, gdy $G = \langle \{a\} \rangle$ dla pewnego $a \in G$, tzn. jest generowana przez jeden element.

Uwaga. Grupa cykliczna nie musi być skończona: $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. Dzieje się tak dlatego, że dla generatora dopuszczamy też ujemne potęgi.

Fakt 14.28. *Każda grupa cykliczna jest przemienna.*

Dowód. Z Lematu 14.26 wiemy, że każdy element w grupie cyklicznej jest postaci a^k lub $(a^{-1})^k$ dla pewnego k. A mnożenie takich elementów jest przemienne. □

Lemat 14.29. *Dla każdego $n < \infty$ wszystkie grupy cykliczne rzędu n są izomorficzne (z $(\mathbb{Z}_n, +)$). Wszystkie grupy cykliczne nieskończonego rzędu są izomorficzne (z $(\mathbb{Z}, +)$).*

Dowód. Dowód tego lematu polega głównie na zrozumieniu definicji oraz określeniu tego, co w zasadzie należy dowieść.

Niech $G = \langle g \rangle, H = \langle h \rangle$ będą grupami cyklicznymi tego samego rzędu p. Określamy $\varphi : G \to H$ jako $\varphi(g^k) = h^k$.

Po pierwsze, φ jest dobrze określone: jeśli $g^m = g^\ell$ to $p|(m - \ell)$ i w takim razie $h^m = h^\ell$.

Należy pokazać, że φ jest izomorfizmem. Jest to bijekcja i ma przekształcenie odwrotne (łatwo widać).

Pozostało pokazać, że φ jest homomorfizmem (bo przekształcenie odwrotne jest zdefiniowane analogicznie). $\varphi(g^k g^\ell) = h^{k+\ell}$ i jednocześnie $\varphi(g^k)\varphi(g^\ell) = h^k h^\ell = h^{k+\ell}$. □

Kiedyś pokażemy też Lemat:

Lemat 14.30. *Podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.*

14.8 Grupa wolna

Definicja 14.31 (Grupa wolna)**.** Niech $\Gamma^{-1} = \{a^{-1} \ : \ a \in \Gamma\}$ będzie rozłączne z Γ.

Grupa G o zbiorze generatorów Γ jest *wolna* (*wolnie generowana przez* Γ) jeśli dla dowolnego słowa $w \in (\Gamma \cup \Gamma^{-1})^*$ w postaci zredukowanej zachodzi

$$w =_G e \implies w = \varepsilon$$

przy czym pierwsza równość oznacza równość w grupie, zaś druga równość słów w $(\Gamma \cup \Gamma^{-1})^*$.

Dla potrzeb tego rozdziału, poniżej $\mathrm{nf}(w)$ oznacza postać zredukowaną w.

Lemat 14.32 (Konstrukcja grupy wolnej). *Niech Σ to zbiór różnych elementów (liter), $\Sigma^{-1} = \{a^{-1} : a \in \Sigma\}$ będzie rozłączny z Σ. Rozpatrzmy zbiór $\mathrm{nf}((\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*)$ wszystkich słów zredukowanych z $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$. Mnożenie elementów $u \cdot w$ to postać zredukowana $\mathrm{nf}(uw)$ słowa uw.*

Tak zdefiniowana grupa jest grupą wolną (o generatorach Σ).

Każda grupa wolna jest izomorficzna z tak skonstruowaną grupą wolną.

Dowód. Głównym problemem jest wykazanie, że takie określenie działania jest poprawne, co wynika z Lematu 14.25:

łączność dla u, v, w zauważmy, że zgodnie z Lematem 14.25 postać normalna $\mathrm{nf}(uvw)$ nie zależy od kolejności wykonania redukcji, w szczególności jest taka sama, jeśli najpierw wykonamy redukcję na uv (obliczając $\mathrm{nf}(uv)$) albo na vw (obliczając $\mathrm{nf}(vw)$). Czyli

$$\mathrm{nf}(\mathrm{nf}(uv)w) = \mathrm{nf}(uvw) = \mathrm{nf}(u\,\mathrm{nf}(vw))$$

przy czym lewa strona odpowiada mnożeniu (w grupie wolnej $(u \cdot v) \cdot w$) zaś prawa $u \cdot (v \cdot w)$

element neutralny elementem neutralnym jest ε

element odwrotny łatwo sprawdzić, że elementem odwrotnym do $u = a_1 \cdots a_k$ jest $a_k^{-1} \cdots a_1^{-1}$ i że jest ono w postaci zredukowanej, jeśli $a_1 \cdots a_k$ jest w postaci zredukowanej.

Warunek grupy wolnej jest trywialnie spełniony.

Dowód faktu, że każda grupa wolna jest izomorficzna z tak zdefiniowaną grupą wymaga trochę więcej wiedzy o homomorfizmach, na razie pominiemy. □

Twierdzenie 14.33 (Nielsen-Schreier). *Każda podgrupa grupy wolnej jest wolna.*

Pokażemy dowód dla przypadku, kiedy podgrupa ma skończony zbiór generatorów (to był oryginalny dowód Nielsena), twierdzenie jest prawdziwe w ogólności (wariant Schriera). Ograniczymy się też do przypadku, gdy wejściowa grupa wolna jest grupą z konstrukcji z Lematu 14.32, ze względu na izomorfizm, to pokazuje dowód w ogólności.

Potrzebujemy najpierw kluczowego lematu, który również pochodzi od Nielsena.

Lemat 14.34. *Niech $w_1, \ldots, w_\ell \in (\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ będą w postaci zredukowanej (jako słowa nad $\Sigma \cup \Sigma^{-1}$). Niech $w_1^{\ell_1} w_2^{\ell_2} \cdots w_n^{\ell_n}$ będzie w postaci zredukowanej oraz $\mathrm{nf}(w_1^{\ell_1} w_2^{\ell_2} \cdots w_n^{\ell_n}) = e$. Wtedy istnieją $u, v, w \in \{w_1, w_1^{-1}, \ldots, w_\ell, w_\ell^{-1}\}$, takie że w uvw istnieje ciąg skróceń, który skraca całe v, tj. istnieją u', u'', w', w'' w postaci zredukowanej, takie że $u = u'u''$, $v = (u'')^{-1}(w')^{-1}$, $w = w'w''$ oraz $u \neq v^{-1} \neq w$ (wszystkie równości to równości słów).*

Dowód. Dokonujemy skróceń w dowolnej kolejności. Istnieje pierwsze w_i, które ulegnie całkowitemu skróceniu, to będzie nasze v. Sąsiednie w_j, w_k nie skróciły się wcześniej, czyli całe skrócenie w_i jest w obrębie w_j, w_k. Jako że nasze słowo jest w postaci zredukowanej, to nie zachodzi, że $w_j = w_i^{-1}$ ani $w_k = w_i^{-1}$. □

Dowód Twierdzenia Nielsena-Schriera. Dowód jest wariantem dowodu Nielsena.

Będziemy przekształcali (skończony) zbiór generatorów:

- jeśli w zbiorze są dwa takie same (lub odwrotne) generatory, to usuwamy jeden z nich; jeśli jest w nim ε, to go usuwamy;
- generator x możemy zastąpić przez x^{-1};
- dwa generatory x, y możemy zastąpić przez $\mathrm{nf}(xy), y$, przy czym robimy to tylko wtedy, gdy $|\mathrm{nf}(xy)| \leq |x|$

Zauważmy, że wykonując kilka takich kroków możemy zastąpić x, y przez $\mathrm{nf}(x^{\pm 1} y^{\pm 1}), y$ lub $\mathrm{nf}(y^{\pm 1} x^{\pm 1}), y$.

Przypuśćmy, że dany skończony zbiór generatorów Γ nie generuje wolnie grupy. Wtedy istnieją pewne $w_1, \ldots, w_k \in \Gamma$ oraz $\ell_1, \ldots, \ell_k$ takie że

$$\mathrm{nf}(w_1^{\ell_1} \cdots w_k^{\ell_k}) = \varepsilon \ ,$$

przy czym możemy założyć, że $w_1^{\ell_1} \cdots w_k^{\ell_k}$ jest w postaci zredukowanej oraz $w_1^{\ell_1} \cdots w_k^{\ell_k} \neq \varepsilon$.

Z Lematu 14.34 istnieją u, v, w: generatory lub ich odwrotności, takie że

$$u = u'u'', v = (u'')^{-1}(w')^{-1}, w = w'w'' \text{ oraz } u \neq v^{-1} \neq w \ .$$

Jeśli $|u''| > |w'|$ to $\mathrm{nf}(uv) = \mathrm{nf}(u'(w')^{-1})$ i długość jest mniejsza, niż długość u. Analogicznie postępujemy dla w, jeśli $|u''| < |w'|$. Czyli jedyny interesujący przypadek, to gdy $|u''| = |w'|$. Co więcej, jeśli $|u'| < |u''|$ to zastępujemy v przez $\mathrm{nf}(uv)$, które ma mniejszą długość. Tak samo gdy $|v'| > |v''|$. Czyli pozostaje nam jedynie przypadek $|u'| \geq |u''|$ i $|w'| \leq |w''|$. Zauważmy, że to w szczególności implikuje, że $|v| \leq |u|, |w|$. Ponadto możemy wywnioskować, że $v \notin \{u, w\}$ (z założenia o postaci zredukowanej wiemy, że $v \notin \{u^{-1}, w^{-1}\}$): przykładowo, gdyby $v = u$ to wtedy $u' = u''^{-1}$, co przeczy temu, że u jest w postaci zredukowanej. Jest jednak możliwe, że $u = w$; przypadek $u = w^{-1}$ nie jest możliwy (bo wtedy $u'' = w'^{-1}$, co prowadzi do tego, że v jest postaci $w'w'^{-1}$.) W szczególności możemy założyć, że u, v, w są w zbiorze generatorów (tzn. żadne z nich nie jest odwrotnością generatora): wystarczy zamienić odpowiedni generator na odwrotny.

Jeśli istnieje $u_1 = u_1'u'' \in \Gamma \cup \Gamma^{-1} \setminus \{v, v^{-1}\}$ takie że $|u_1'| < |u''|$ lub istnieje $w_2 = w'w_2'' \in \Gamma \cup \Gamma^{-1} \setminus \{v, v^{-1}\}$ takie że $|w_2''| < |w'|$ to jak powyżej możemy zastąpić v przez krótszy generator.

W pozostałym przypadku, dla każdego $x \in \Gamma$, jeśli $x = w'x''$ to zastępujemy go przez $\mathrm{nf}(vx) = \mathrm{nf}((u'')^{-1}x'')$ analogicznie, jeśli $x = x'w'^{-1}$ to zastępujemy jeden z nich przez $\mathrm{nf}(xv^{-1}) = \mathrm{nf}(x'u'')$. Zauważmy, że:

- $|\mathrm{nf}(u''^{-1}x'')| \leq |x|$ i jeśli choć raz jest mniejsza (czyli jest skrócenie w $u''^{-1}x''$), to zmniejsza się suma długości generatorów;
- zgodnie z założeniem z poprzedniego akapitu, $|w'| = |u''| \leq |x''|$.

Zdefiniujmy teraz relację równoważności na słowach: dwa słowa z $(\Sigma \cup \Sigma^{-1})^*$ są w relacji $\sim_k$, jeśli mają ten sam prefiks długości k:

$$\alpha \sim_k \beta \iff \alpha[1..k] = \beta[1..k] \ .$$

oraz funkcję na zbiorze słów (będzie to zawsze zbiór geenratorów i odwrotności generatorów): dla zbioru A sumujemy kwadraty wielkości klas abstrakcji relacji $\sim_k$

$$\mathrm{Pref}_k(A) = \sum_{[w]_{\sim_k} \in A/\sim_k} |[w]_{\sim_k}|^2$$

Zauważmy, że z definicji mamy

$$\mathrm{Pref}_k(A) \leq |A|^2 \ .$$

To, że patrzymy na sumę kwadratów, jest arbitralnym wyborem: ważne jest, aby zastąpienie dwóch klas abstrakcji jedną zwiększało funkcję oraz zastąpienie dwóch klas abstrakcji o mocach $n_1, n_2 > 1$ przez $1, n_1 + n_2 - 1$ też zwiększało funkcję.

Niech $K = \max_{g \in \Gamma_0} |g| + 1$, gdzie Γ_0 to wejściowy zbiór generatorów. Zauważmy, że wartość tej funkcji nie rośnie w czasie wykonywanych operacji. Dla zbioru generatorów Γ określamy funkcję $f(\Gamma)$:

- na zerowej współrzędnej znajduje się suma długości elementów z Γ
- na $1 \leq i \leq K$ współrzędnej znajduje się $(2|\Gamma|)^2 - \mathrm{Pref}_{K-i}(\Gamma \cup \Gamma^{-1})$, zauważmy, że jest to liczba nieujemna.

Określamy na niej naturalny porządek leksykograficzny. W szczególności, jest to dobry porządek, bo wszystkie współrzędne są nieujemne.

Pozostaje pokazać, że nasz algorytm w każdym kroku zmniejsza wartość funkcji. Oznacza to, że po skończonej liczbie kroków się zatrzyma. Ale to oznacza, że nie ma nietrywialnego słowa w postaci zredukowanej, które jest równe e.

Jeśli skrócimy sumę długości generatorów, to wartość funkcji oczywiście spada. Jeśli nie, to ustalmy $v = (u'')^{-1}(w')^{-1}$ jak wyżej i niech $k = |u''| = |v'|$. Zauważmy, że $u^{-1} \sim_k v$ i są to różne elementy oraz $v^{-1} \sim_k w$ i są to różne elementy (może być, że $u = w$). Po przeprowadzeniu operacji w klasie abstrakcji v^{-1} pozostaje tylko v^{-1} a pozostałe elementy zostały przeniesione do klasy abstrakcji v, bo wymieniono im prefiks w' na $(u'')^{-1}$ (jeśli było jeszcze jakieś skrócenie, to zmalała suma długości, co kończy dowód). Pozostałe klasy abstrakcji $\sim_k$ nie zostały ruszone: zauważmy, że wszystkie generatory, na których wykonujemy operacje,

mają długość przynajmniej $2k$, bo w przeciwnym razie moglibyśmy skrócić sumę długości; czyli po zmianie prefiksu długości k nie zmienia się sufiks długości k. Czyli zastępujemy dwie klasy abstrakcji o mocach $n_1, n_2 \geq 2$ dwoma klasami o mocach $1, n_1 + n_2 - 1$. Wtedy

$$\begin{aligned}(n_1 + n_2 - 1)^2 + 1 &= n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2 - 2n_1 - 2n_2 + 2 \\ &= n_1^2 + n_2^2 + 2(n_1 - 1)(n_2 - 1) \\ &\geq n_1^2 + n_2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &> n_1^2 + n_2^2\end{aligned}$$

Dla współrzędnych odpowiadających $\ell > k$ zauważmy, że podobny argument pokazuje, że wartość funkcji nie wzrasta: jeśli jakieś słowo $g \in \Gamma$ zostanie zmienione, to zostaną zmienione wszystkie słowa w jego klasie abstrakcji $\sim_\ell$ (bo mają ten sam prefiks długości $\ell > k$) oraz nie wpłynie to na słowa w innych klasach abstrakcji (dla odwrotności zmienianego : jeśli nie nastąpi dodatkowe skrócenie, to mamy zmieniamy jedynie prefiks długości $k < \ell$, czyli sufiks długości ℓ nie zostanie zmieniony; jeśli nastąpi dodatkowe skrócenie, to spada sumaryczna długość generatorów). Czyli zmieniamy dwie klasy abstrakcji (o mocach $n_1 \geq 1$ i $n_2 \geq 0$) na dwie klasy o mocach $0, n_1 + n_2$, oczywiście $(n_1 + n_2)^2 \geq n_1^2 + n_2^2$.

Zauważmy, że dla mniejszych wartości $\ell < k$ być może odpowiednie współrzędne wzrastają, ale nie ma to znaczenia. □

Rozdział 15

Grupy permutacji

Definicja 15.1. Grupa permutacji S_n to zbiór wszystkich bijekcji ze zbior $\{1, 2, \ldots, n\}$ w siebie; operacją jest składanie funkcji, tj.

$$(\sigma' \cdot \sigma)(i) = \sigma'(\sigma(i)).$$

Permutacje zapisujemy jako dwuwierszową tabelkę:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} .$$

Przykład 15.2. Permutacje S_4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

Z takiej reprezentacji łatwo wyliczyć permutację odwrotną: wystarczy zamienić miejscami i przesortować kolumny.

Z dokładnością do izomorfizmu każda grupa jest grupą permutacji.

Twierdzenie 15.3 (Cayley). *Dla każdej grupy G (o n elementach) istnieje podgrupa S_n izomorficzna z G.*

Dowód. Niech $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Po pierwsze, o grupie permutacji możemy myśleć, że operuje na elementach $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ a nie $\{1, 2, \ldots, n\}$. Zdefiniujmy grupę permutacji na G. Dla elementu g definiujemy permutację $\sigma_g(g_i) = gg_i$. Nasza podgrupa to $\{\sigma_g \,:\, g \in G\}$. A izomorfizm to $g \mapsto \sigma_g$.

na podgrupę definiujemy tak, że funkcja jest na (podgrupa to obraz tego przekształcenia)

różnowartościowość jeśli $g \neq g'$ to w szczególności: $\sigma_g(e) = g \neq g' = \sigma_{g'}(e)$, czyli $\sigma_g \neq \sigma_{g'}$.

homomorfizm weźmy g, g'. Wtedy $\sigma_g \circ \sigma'_g(h) = gg'h = \sigma_{gg'}(h)$.

grupa Jeśli $\sigma_g, \sigma_{g'}$ są w tej grupie, to $\sigma_g\sigma_{g'} = \sigma_{gg'}$ też tam jest, bo jest obrazem gg'. Analogicznie, jeśli σ_g jest w grupie, to jest też w niej $\sigma_{g^{-1}}$, które jest elementem odwrotnym do σ_g. □

15.1 Rozkład permutacji na cykle

Definicja 15.4 (cykl). *Cykl* σ to taka permutacja, że istnieją elementy $a_1, \ldots, a_n$, że $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ (gdzie $\sigma(a_n) = a_1$) a na innych elementach jest identycznością. Cykl taki zapisujemy jako $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Elementy $\{a_1, \ldots, a_n\}$ to *dziedzina cyklu* lub *nośnik cyklu*, mówimy też o cyklu *na elementach* $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Długość cyklu $(a_1, \ldots, a_n)$ to n.

Cykle są *rozłączne*, gdy ich nośniki nie mają takich wspólnego elementu.

Transpozycja to cykl dwuelementowy. *Transpozycja elementów sąsiednich* to transpozycja postaci $(i, i+1)$.

Lemat 15.5. *1. Rząd cyklu długości k to k.*

2. Dla cyklu $(a_1, \ldots, a_n)$ permutacja odwrotna to $(a_1, \ldots, a_n)^{-1} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1) = (a_1, \ldots, a_n)^{n-1}$.

3. *Jeśli* $\{c_i\}_{i=1}^k$ *są parami rozłącznymi cyklami, to* $c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}$ *jest tą samą permutacją, niezależnie od wyboru permutacji* $i_1,\ldots,i_k$ *liczb* $1,\ldots,k$.

4. *Jeśli* $\{c_i\}_{i=1}^k$ *są parami rozłącznymi cyklami, to rząd* $c_1\cdots c_k$ *to* nww *rzędów poszczególnych cykli* $c_1,\ldots,c_k$.

5. *Jeśli* $\sigma = c_1c_2\cdots c_k$, *gdzie* $c_1,\ldots,c_k$ *są parami rozłącznymi cyklami , to* $\sigma^{-1} = c_1^{-1}c_2^{-1}\cdots c_k^{-1}$.

Dowód. Ad 1) Oczywiste.

Ad 2) Oczywiste.

Ad 3) Jako że te cykle są parami rozłączne, to można zamienić każde możliwe dwa sąsiednie. Wystarczy ustawić na skrajnie lewym miejscu pierwszy, potem drugi itp.

Ad 4) Popatrzmy na

$$(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k})^\ell \ .$$

Jako że są to cykle rozłączne, to można zamieniać parami sąsiednie tak aby dostać grupowanie

$$(c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k})^\ell = c_{i_1}^\ell c_{i_2}^\ell\cdots c_{i_k}^\ell \ .$$

Biorąc za ℓ najmniejszą wspólną wielokrotność uzyskujemy, że każde $c_i^\ell = e$. Jeśli ℓ nie jest wielokrotnością któregoś z rzędów, to któreś c_i^ℓ nie jest identycznością, z Lematu 14.17, Jako że inne cykle nie ruszają elementów z jego nośnika, ta permutacja nie jest wtedy identycznością.

Ad 5) Wystarczy zauważyć, że jeśli $c_1,\ldots,c_k$ są parami rozłącznymi cyklami, to również $c_1^{-1},\ldots,c_k^{-1}$ są parami rozłącznymi cyklami.

□

Twierdzenie 15.6. *1. Każda permutacja* σ *jednoznacznie (z dokładnością do kolejności cykli) rozkłada się na rozłączne cykle.*

2. *Cykl długości* k *jest złożeniem* $k-1$ *transpozycji.*

3. *Każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej liczby transpozycji elementów sąsiednich (niekoniecznie rozłącznych).*

4. *Każda permutacja da się przedstawić jako złożenie transpozycji (niekoniecznie rozłącznych).*

5. *Każda permutacja da się przedstawić jako złożenie transpozycji sąsiednich (niekoniecznie rozłącznych).*

6. *Grupa* S_n *jest generowana przez zbiór transpozycji (sąsiednich).*

Dowód. Ad 1) Bierzemy dowolny element i, obliczamy kolejno $\sigma^1(i),\sigma^2(i),\ldots$, aż coś się powtórzy; niech pierwszy powtórzony element to $\sigma(j)$. Musi to być i: w przeciwnym przypadku $\sigma(j) = \sigma(j')$, co nie jest możliwe. Czyli dostajemy cykl. Powtarzamy operację na kolejnych elementach spoza skonstruowanych już cykli. Nie możemy wejść do starego cyklu, bo każdy element w nim ma już ustalony przeciwobraz.

Ad 2) Pokażmy najpierw dla cyklu $(i,i+1,\ldots,j)$. Załóżmy, że przedstawiliśmy już $(i+1,i+2,\ldots,j)$ jako złożenie transpozycji. Chcemy wydłużyć ten cykl: $i+1$ przesłać na i a i na $i+1$. W tym celu trzeba nałożyć $(i,i+1)$ (z lewej):

$$(i,i+1)(i+1,i+2,\ldots,j) = (i,i+1,i+2,\ldots,j)$$

Zauważmy, że w szczególności jest to złożenie transpozycji sąsiednich. Dla dowolnego cyklu robimy tak samo, transpozycje niekoniecznie są elementów sąsiednich.

Ad 3) Popatrzmy na (i,j). Łatwo sprawdzić, że

$$(i,j) = (j,j-1,\ldots,i+1)(i,i+1,\ldots,j)$$

- $j \to i \to i$

- $i \to i+1 \to j$
- $k \to k+1 \to k$ dla $i < k < j$

Jako że $(j, j-1, \ldots, i+1) = (i, i+1, \ldots, j)^{-1}$, z punktu pierwszego oba cykle wyrażają się jako złożenie transpozycji elementów sąsiednich: odpowiednio $j-i$ oraz $j-i-1$, co w sumie daje $2(j-i)-1$, czyli nieparzystą liczbę transpozycji.

Pozostałe tezy wynikają bezpośrednio z tych pokazanych. □

Uwaga. Od teraz alternatywnym sposobem zapisu permutacji jest podanie jej jako iloczynu cykli rozłącznych. Np.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 5 & 4 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 & 14 & 9 & 6 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} = (1,7)(2,5,3,4,12)(6,13,11)(8,10,9,14) \ .$$

15.2 Permutacje parzyste i nieparzyste.

Ważna funkcja: parzystość permutacji (znak permutacji).

Definicja 15.7 (Inwersje, parzystość permutacji)**.** Dla f będącej bijekcją z podzbioru liczb naturalnych w ten sam zbiór (czyli w szczególności permutacji) *inwersja* to para (i,j), taka że $i<j$ oraz $f(i) > f(j)$.

Parzystość permutacji to parzystość ilości jej inwersji.

Znak $\operatorname{sgn}(\sigma)$ permutacji σ to $+1$, gdy σ jest parzysta i -1 gdy nieparzysta.

Uwaga. To jest własność w grupie permutacji, nie własność algebraiczna: grupy generowane przez cykl $(1,2)$ oraz $(1,2)(3,4)$ są izomorficzne (z $\mathbb{Z}_2$), ale $(1,2)$ jest nieparzysta, a $(1,2)(3,4)$ jest parzysta.

Lemat 15.8. *Niech $\sigma, \sigma' \in S_n$ będą permutacjami. Wtedy*

$$\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma) \ .$$

Dowód. Pokażemy najpierw dla σ' będącego transpozycją sąsiednich elementów, tj. $\sigma' = (i, i+1)$. Popatrzmy na inwersje w

$$\sigma'\sigma \ .$$

Popatrzmy na czwórki $(k, \ell, \sigma(k), \sigma(\ell))$ i zastanówmy się, dla których z nich zmienia się, czy są inwersją, czy nie po nałożeniu σ'.

- jeśli $\sigma(k), \sigma(\ell) \notin \{i, i+1\}$ to dla pary k, ℓ nic się nie zmienia;
- jeśli $\{\sigma(k), \sigma(\ell)\} = \{i, i+1\}$ to dla pary k, ℓ zmienia się, czy jest inwersją (na przeciwny status)
- dla pozostałych par mamy, że jedno z $\sigma(k)$, $\sigma(\ell)$ jest w $\{i, i+1\}$ a jedno nie; niech to pierwsze to k a drugie ℓ. Ale wtedy $\sigma(\sigma'(k))$ zmienia się z i na $i+1$ (lub z $i+1$ na i) i tym samym dalej jest mniejsze/większe niż $\sigma(\sigma'(\ell)) = \sigma(\ell)$.

Dla dowolnego $\sigma'\sigma$: wyrażamy σ oraz σ' jako iloczyn transpozycji: $\sigma = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$, $\sigma' = \prod_{i=1}^{m} \sigma'_i$. Wtedy

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\sigma_i) = (-1)^n$$
$$\operatorname{sgn}(\sigma') = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(\sigma'_i) = (-1)^m$$
$$\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma) = \prod_{i=1}^{m} \operatorname{sgn}(\sigma'_i) \prod_{i=1}^{n} \operatorname{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{n+m}$$

z czego widać, że $\operatorname{sgn}(\sigma'\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma')\operatorname{sgn}(\sigma)$. □

Wniosek 15.9. sgn jest homomorfizmem z S_n w $(\{-1,+1\}, \cdot)$.

Lemat 15.10.
- *Cykl parzysty jest permutacją nieparzystą.*

- *Cykl nieparzysty jest permutacją parzystą.*
- *Parzystość permutacji to parzystość ilości cykli parzystych w rozkładzie na cykle rozłączne.*
- *Permutacje parzyste stanowią podgrupę A_n, która ma $\frac{n!}{2}$ permutacji.*

Dowód. Dla pierwszych trzech punktów wystarczy skorzystać z charakteryzacji z Twierdzenia 15.6.

W ostatnim punkcie: Oczywiście jest to podgrupa; zauważmy, że przemnożenie przez (ustaloną) permutację nieparzystą to bijekcja między permutacjami parzystymi i nieparzystymi. Co daje, że $|A_n| = \frac{n!}{2}$. □

Przykład 15.11. Zwykle w celu policzenia parzystości danej explicite permutacji najłatwiej jest to zrobić licząc jej przedstawienie w postaci cykli rozłącznych. Przykładowo, dla rozważanej wcześniej permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 5 & 4 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 & 14 & 9 & 6 & 2 & 11 & 8 \end{pmatrix} = (1,7)(2,5,3,4,12)(6,13,11)(8,10,9,14)$$

łatwo sprawdzamy, że jest ona parzysta: ma dwa cykle długości parzystej.

15.3 Wyznacznik

Wartość wyznacznika macierzy $M = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ można zadać wprost jako:

$$|(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \ .$$

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Rozdział 16

Działania grupy na zbiorze

16.1 Mnożenie podzbiorów grupy

W podzbiorach grupy G definiujemy działanie:

$$U \cdot W = \{uw \,:\, u \in U,\, w \in W\}.$$

Łatwo sprawdzić, że jest ono łączne, czyli

$$U \cdot (W \cdot V) = (U \cdot W) \cdot V = U \cdot W \cdot V.$$

z tak zdefiniowanym działaniem są monoidem (mają jedność, jest to $\{e\}$).

Dla zbiorów jednoelementowych zwykle będziemy opuszczać nawiasy oznaczające zbiór i pisać $a \cdot U$ lub po prostu aU, opuszczając znak działania grupowego.

Będziemy też korzystać z rozdzielności mnożenia względem sumy (mnogościowej), tzn.:

$$U(V \cup W) = UV \cup UW \quad \text{oraz} \quad (V \cup W)U = VU \cup WU \ .$$

Fakt 16.1. *Niech G grupa, $H \leq G$ to jej podgrupa. Wtedy:*

- $gG = Gg = G$;
- $gH = H \iff Hg = H \iff gH \subseteq H \iff Hg \supseteq H \iff gH \supseteq H \iff Hg \subseteq H \iff g \in H$.

Dowód. G jest zamknięta na mnożenie i dlatego

$$gG \subseteq G$$

W szczególności

$$g^{-1}G \subseteq G$$

Mnożąc obustronnie przez g dostajemy

$$G \subseteq gG$$

Dla mnożenia z prawej strony postępujemy analogicznie; co daje pierwszy punkt.

Jeśli $g \in H$ to z pierwszego punktu mamy $gH = Hg = H$. Jeśli $gH \subseteq H$ to w szczególności $ge = g \in H$, analogicznie postępujemy dla $Hg \subseteq H$. Jeśli $gH \supseteq H$ to mnożąć obustronnie przez g^{-1} otrzymujemy $g^{-1}H \subseteq H$, czyli $g^{-1} \in H$, czyli $g \in H$. □

16.2 Działanie grupy na zbiorze

Definicja 16.2 (Działania grupy na zbiorze)**.** Mamy zbiór obiektów kombinatorycznych $\mathcal{C}$ oraz grupę permutacji jego elementów $S(\mathcal{C})$, oznaczaną przez S.

Działanie grupy G na $\mathcal{C}$ to homomorfizm z G w S. Zwykle zapisujemy to działanie jako $g(c)$ lub nawet gc, pomijając homomorfizm.

Działanie będziemy też rozszerzali do podzbiorów G w naturalny sposób: jeśli G działa na $\mathcal{C}$ to dla $U \subseteq G$ definiujemy

$$Uc = \{gc \,:\, g \in U\}$$

Orbita elementu c: $Gc = \{g(c) \,:\, g \in G\}$ (oznaczamy jako O_c)

Stabilizator elementu c: $\{g \in G \,:\, g(c) = c\}$, oznaczamy jako G_c. Zauważmy, że G_c to największy zbiór taki że $G_c c = c$.

Przykład 16.3. Rozpatrzmy zbiór sześciennych kostek ze ścianami pomalowanymi na biało lub czarno. Działa na nim grupa obrotów (obrotów i odbić) sześcianu. Zauważmy, że grupa obrotów ma fizyczną interpretację, grupa obrotów i odbić już nie bardzo.

Rozpatrzmy zbiór możliwych kostek domina (pola od 0 do 6). Działa na niej grupa obrotów (obrotów i odbić) prostokąta. Podobnie, grupa obrotów ma sens fizyczny, obrotów i odbić mniej (chyba że są ze szkła).

Lemat 16.4. *Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$, zaś $s \in \mathcal{C}$. Wtedy stabilizator G_s jest podgrupą G.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 16.5. *Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$, zaś $c, c' \in \mathcal{C}$. Wtedy O_c, $O_{c'}$ są równe lub rozłączne.*

Dowód. Jeśli O_c, $O_{c'}$ są rozłączne to OK.

Jeśli O_c, $O_{c'}$ nie są rozłączne, to istnieje ich element wspólny, które jest postaci $gc = g'c'$ dla pewnych $g, g' \in G$. Wymnóżmy tę równość lewostronnie przez G:

$$Ggc = Gg'c' \ .$$

Jako że $Gg = G = Gg'$ oraz $Gc = O_c$ i $Gc' = O_{c'}$ dostajemy

$$O_c = O_{c'} \ . \quad \square$$

Lemat 16.6. *Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$, zaś $s \in \mathcal{C}$. Wtedy $|O_s| \cdot |G_s| = |G|$.*

Dowód. Popatrzmy na gs dla różnych $g \in G$, takich elementów jest $|G|$, ale niektóre są takie same. W ogólności

$$\{gs \,:\, g \in G\} = O_s \ .$$

Pytanie, dla ilu $g \in G$ otrzymujemy ten sam element w O_s. Twierdzimy, że dla $|G_s|$, co da tezę.

Ustalmy $g_0 \in G$ i popatrzmy na zbiór $\{g \,:\, gs = g_0 s\}$. Twierdzimy, że jest on postaci $g_0 G_s$:

$\Leftarrow$

$$g_0 G_s s = g_0(G_s s) = g_0 s.$$

$\Rightarrow$ Jeśli $gs = g_0 s$ to

$$g_0^{-1} g s = s$$

i tym samym $g_0^{-1} g \in G_s$ i $g = g_0(g_0^{-1} g) \in g_0 G_s$. $\square$

Wniosek 16.7. Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$, zaś $s \in \mathcal{C}$. Wtedy $|O_s|$ oraz $|G_s|$ dzielą $|G|$.

Przykład 16.8. Rozpatrzmy sześcian i grupy: obrotów oraz obrotów i symetrii, rozpatrujemy działanie na zbiorze ścian. Popatrzmy na ustaloną ścianę. Wielkość jej orbity to 6. Wielkość stabilizatora to 4 (dla obrotów) lub 8 (dla obrotów i odbić). Czyli rzędy tych grup to 24 lub 48.

Wyjdzie tyle samo, gdybyśmy rozpatrywali wierzchołki (orbita ma 8 elementów, stabilizator 3 lub 6).

16.3 Lemat Burnside'a

Zliczanie orbit działania grupy odpowiada zliczaniu „nierozróżnialnych" względem działania grupy obiektów, np. kostek nierozróżnialnych ze wzlęgu na obrót itp.

Przykład 16.9. Rozważmy planszę do gry w kółko i krzyżyk. Każde pole ma przypisany jeden z trzech symboli: kółko, krzyżyk lub nic. Naszą grupą będzie grupa symetrii kwadratu. Dwie plansze, które można na siebie przeprowadzić przy użyciu elementów tej grupy uważamy za „identyczne" (bo ten sam gracz wygrywa, taka sama jest strategia itp.). Takie „identyczne" plansze to dokładnie orbita planszy względem działania tej grupy. A czym są „różne" plansze? To dokładnie różne orbity. Pytając o różne plansze, pytamy o zbiór orbit.

Pokażemy, jak policzyć moc zbioru orbit.

Definicja 16.10 (Punkty stałe)**.** Dla grupy G działającej na zbiorze $\mathcal{C}$ mówimy, że $c \in \mathcal{C}$ jest *punktem stałym* $g \in G$ jeśli $g(c) = c$. Zbiór punktów stałych g oznaczamy przez

$$\operatorname{fix}(g) = \{c \in \mathcal{C} \,:\, g(c) = c\} \ .$$

Twierdzenie 16.11 (Lemat Burnside'a)**.** *Niech G działa na zbiorze $\mathcal{C}$ a $\mathcal{O}$ będzie zbiorem orbit tego działania. Wtedy*

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{fix}(g)| \ .$$

dowód pominięty na wykładzie. Popatrzmy na $|\{(g,x) \,:\, gx = x\}|$.

$$\begin{aligned}
|\{(g,x) \,:\, gx = x\}| &= \sum_x \sum_{g:gx=x} 1 \\
&= \sum_x |G_x| \\
&= \sum_x \frac{|G|}{|O_x|} \\
&= |G| \sum_x \frac{1}{|O_x|} \\
&= |G| \sum_{O \in \mathcal{O}} \sum_{x \in O} \frac{1}{|O|} \\
&= |G| \sum_{O \in \mathcal{O}} 1 \\
&= |G||\mathcal{O}| \\
|\{(g,x) \,:\, gx = x\}| &= \sum_g \sum_{x:gx=x} 1 \\
&= \sum_g |\operatorname{fix}(g)|
\end{aligned}$$

□

Przykład 16.12 (Kontynuacja Przykładu 16.9)*.* Rozważmy planszę do gry w kółko i krzyżyk. Każde pole ma przypisany jeden z trzech symboli: kółko, krzyżyk lub nic. Naszą grupą będzie grupa symetrii kwadratu. Policzmy liczbę punktów stałych dla poszczególnych przekształceń:

e Każde z 3^9 ustawień jest punktem stałym.

o_{90^0} Cztery narożniki muszą być tego samego koloru (bo przechodzą cyklicznie na siebie), tak samo 4 pola zewnętrzne, możemy też dowolnie ustalić kolor pola środkowego. Czyli mamy 3^3 punktów stałych.

o_{270^0} Tak samo jak o_{90^0}.

o_{180^0} Przeciwległe narożniki są tego samego koloru, tak samo przeciwległe pola zewnętrzne. Czyli 3^5 punktów stałych.

symetria wzdłuż przekątnej (dwie takie symetrie) pola na przekątnej przechodzą same na siebie, pozostałe 6 wymienia się parami. Czyli 3^6.

symetria przez bok (dwie takie symetrie) Podobnie, jak wyżej: 3 pola przechodzą same na siebie, pozostałe grupują się parami.

Czyli w sumie

$$(3^9 + 2 \cdot 3^3 + 3^5 + 4 \cdot 3^6)/8$$

Warto sprawdzić, że naprawdę wyszła liczba całkowita...

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Zauważmy, że powyższy sposób liczenia liczby punktów stałych niejawnie korzystał z rozbicia na cykle: jeśli rozpiszemy przekształcenie g jako złożenie cykli rozłącznych na polach (jak wyżej), to wtedy wszystkie pola w jednym cyklu muszą mieć ten sam symbol. I odwrotnie: jeśli plansza spełnia warunek, że wszystkie elementy w jednym cyklu g mają to samo pole, to jest ona punktem stałym g. Czyli jeśli g ma k cykli, to ma 3^k punktów stałych.

Przykładowo, obrót o 90 stopni (w lewo lub prawo) ma rozbicie na cykle

$$(1,3,9,7)(2,4,6,8)(5)$$

zaś symetria względem prostej poziomej

$$(1,7)(2,8)(3,9)(4)(5)(6)$$

Rozdział 17

Warstwy, Twierdzenie Lagrange'a

17.1 Warstwy

Najprostsze działanie grupy na sobie: przez mnożenie (z lewej strony). Dla całej grupy niewiele to daje. Ale co jeśli będziemy mnożyli tylko prezz elementy z podgrupy?

Co się dzieje z podzbiorami? A dokładniej: z podgrupą?

Definicja 17.1 (Warstwa)**.** Niech $H \leq G$ będzie podgrupą. Definiujemy naturalne działanie $h \in H$ na G:

$$h(g) = hg$$

Orbita elementu g jest postaci

$$Hg$$

Zwyczajowo nazywamy ją warstwą prawostronną H dla g w G.

Warstwa lewostronna jest postaci

$$gH$$

też jest orbitą, ale dla mniej oczywistego działania

$$h(g) = gh^{-1}$$

Zbiór warstw lewostronnych H w G oznaczamy przez G/H.

Należy sprawdzić, że to drugie działanie jest dobrze określone (zadanie).

My będziemy myśleć głównie o warstwach lewostronnych (choć naturalniejsza jest definicja dla prawostronnych)

Lemat 17.2. *Niech $H \leq G$.*

- *Każde dwie warstwy H w G są równoliczne.*
- *Każde dwie warstwy lewostronne (prawostronne) H w G są rozłączne lub identyczne.*

Dowód. Działanie grupy G na zbiorze warstw lewostronnych przekształca dowolną warstwę w dowolną inną:

$$(g'g^{-1})gH = g'H$$

Czyli $|g'H| \leq |gH|$; z symetrii mamy równość, ponadto to przekształcenie jest odwracalne. Analogicznie dla warstw prawostronnych.

Warstwy są rozłączne, bo są orbitami. □

Uwaga. Uwaga! Warstwy lewostronne i prawostronne mogą mieć nietrywialny przekrój!

Aby sprawdzić, czy dwa elementy sa w tej samej warstwie nie musimy liczyć ich warstw:

Lemat 17.3. *Niech $H \leq G$. Wtedy*

- $g_0H = g_1H \iff g_1^{-1}g_0 \in H \iff g_0^{-1}g_1 \in H$
- $Hg_0 = Hg_1 \iff g_1g_0^{-1} \in H \iff g_0g_1^{-1} \in H$

Dowód. Jeśli $g_0H = g_1H$ to mnożymy obie strony przez g_1^{-1}, otrzymując $g_1^{-1}g_0H = H$, co jest równoważne temu, że $g_1^{-1}g_0 \in H$. Resztę pokazuje się analogicznie. □

Wniosek 17.4. W grupie skończonej

- (Twierdzenie Legrange'a) Rząd podgrupy dzieli rząd grupy.
- Rząd elementu dzieli rząd grupy.
- Każda grupa o p-pierwszym elementach jest cykliczna i każdy jej element (poza e) jest generatorem.
- Dla każdego a zachodzi $a^{|G|} = e$.

Dowód. Niech $H \leq G$.

- Zbiór warstw względem H to partycja G, jednocześnie wszystkie są równoliczne i jedna z nich to H.
- Dla danego g rząd p to $|\langle p \rangle|$, korzystamy z poprzedniego punktu.
- Weźmy $g \neq e$; generuje podgrupę, jej rząd dzieli p i nie jest to 1, czyli to jest p. □

Wniosek 17.5 (Małe Twierdzenie Fermat'a). Jeśli $p \nmid a$ to $a^{p-1} \bmod p = 1$.

Dowód. Wystarczy pokazać dla $a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Popatrzmy na $\mathbb{Z}_p \setminus 0$ z mnożeniem. To jest grupa, ma $p-1$ elementów. Czyli $a^{p-1} = e$ w $\mathbb{Z}_p \setminus 0$. Czyli to jest 1 modulo p. □

Definicja 17.6 (Indeks podgrupy)**.** Indeks podgrupy H względem grupy G to ilość warstw lewostronnych H w G, oznaczamy przez $G : H$.

Wartość jest taka sama, jeśli weźmiemy warstwy prawostronne. Zwykle zajmujemy się przypadkiem, kiedy indeks podgrupy jest skończony (a najczęściej tym, że obie grupy są skończone).

Przykład 17.7. Naszą grupą będą obroty i odbicia kwadratu; niech wierzchołki kwadratu będą ponumerowane $1, 2, 3, 4$, w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara, 1 w prawym dolnym rogu. Ta grupa ma 8 elementów (identyczność, obrót o 90^0, 180^0, 270^0, symetrie względem przekątnych, symetria pionowa i symetria pozioma) i możemy o niej myśleć jak o podgrupie S_4, czyli te elementy to $e; (1,2,3,4); (1,3)(2,4); (1,4,3,2); (1,3); (2,4); (1,4)(2,3); (1,2)(3,4)$.

Weźmy podgrupę obrotów, ma 4 elementy $e; (1,2,3,4); (1,3)(2,4); (1,4,3,2)$. Ma też dwie warstwy (warstwa lewostronna i prawostronna zgadzają się): sama ta grupa $\{e; (1,2,3,4); (1,3)(2,4); (1,4,3,2)\}$ oraz odbicia $\{(1,3); (2,4); (1,4)(2,3); (1,2)(3,4)\}$.

Weźmy grupę generowaną przez symetrię pionową, ta grupa ma dwa elementy (symetria pionowa $(1,4)(2,3)$ i identyczność e).

Warstwy lewostronne:

- $e\{e, (1,4)(2,3)\} = \{e, (1,4)(2,3)\}$.
- $(1,2,3,4)\{e, (1,4)(2,3)\} = \{(1,2,3,4), (2,4)\}$.
- $(1,3)(2,4)\{e; (1,4)(2,3)\} = \{(1,3)(2,4); (1,2)(3,4)\}$.
- $(1,4,3,2)\{e, (1,4)(2,3)\} = \{(1,4,3,2); (1,3)\}$.

Warstwy prawostronne:

- $\{e, (1,4)(2,3)\}e = \{e, (1,4)(2,3)\}$.
- $\{e, (1,4)(2,3)\}(1,2,3,4) = \{(1,2,3,4); (1,3)\}$.
- $\{e; (1,4)(2,3)\}(1,3)(2,4) = \{(1,3)(2,4); (1,2)(3,4)\}$.
- $\{e, (1,4)(2,3)\}(1,4,3,2) = \{(1,4,3,2); (2,4)\}$.

Przykład 17.8. Grupa permutacji na 3 elementach (S_3). Podgrupa generowana przez cykl $(1,2,3)$ ma 3 elementy. Czyli ma dwie warstwy (ta podgrupa: permutacje parzyste i pozostałe elementy: permutacje nieparzyste).

Podgrupa generowana przez cykl $(1,2)$ (innymi słowy: wszystkie permutacje, które trzymają 3 w miejscu). Ma dwa elementy, czyli ma 3 warstwy lewostronne i 3 prawostronne.

Lewostronne

- $\{e,(1,2)\}$;
- $(1,3)\{e,(1,2)\} = \{(1,3);(1,2,3)\}$;
- $(2,3)\{e,(1,2)\} = \{(2,3);(1,3,2)\}$.

Opis: na co przechodzi 3; opis można wyprowadzić z Lematu 17.3 — zauważmy, że nasza podgrupa to zbiór elementów, które nie ruszają 3.

Prawostronne

- $\{e,(1,2)\}$;
- $\{e,(1,2)\}(1,3) = \{(1,3);(1,3,2)\}$;
- $\{e,(1,2)\}(2,3) = \{(2,3);(1,2,3)\}$.

Opis: co przechodzi na 3; jak wyżej — można go wyprowadzić z Lematu 17.3.

Rozdział 18

Homomorfizmy i grupy ilorazowe, podgrupy normalne. Temat ominięty na wykładzie

18.1 Homomorfizmy

Definicja 18.1 (Jądro, obraz homomorfizmu)**.** Dla homomorfizmu $\varphi : G \to H$ jego *obraz* to $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(g) : g \in G\} = \varphi(G)$ zaś *jądro* to $\ker\varphi = \{g : \varphi(g) = e\} = \varphi^{-1}(e)$.

Lemat 18.2. *Dla homomorfizmu $\varphi : G \to H$ jego jądro i obraz to podgrupy, odpowiednio G oraz H.*

Dowód. Jądro:

element odwrotny jeśli $\varphi(a) = e$ to $\varphi(a^{-1}) = e^{-1} = e$.

działanie jeśli $\varphi(a) = \varphi(b) = e$ to $\varphi(ab) = e$.

Obraz.

element odwrotny $\varphi(b^{-1}) = a^{-1}$.

składanie Jeśli $a, a' \in \operatorname{Im}\varphi$ to istnieją b, b' takie że $\varphi(b) = a, \varphi(b') = a'$ i wtedy $\varphi(bb') = aa'$. □

Jaki jest związek między podgrupami a homomorfizmami? Miedzy podgrupami a jądrem jakiegoś homomorfizmu?

Definicja 18.3 (Podgrupa normalna)**.** H jest *podgrupą normalną* G, gdy $aH = Ha$ dla każdego elementu $a \in G$; zapisujemy to jako $H \trianglelefteq G$.

Przykład 18.4. 1. Trywialna podgrupa $\{e\}$ jest zawsze normalna.

2. Grupa alternująca A_n jest normalną podgrupą S_n.

3. Grupa obrotów kwadratu jest normalną podgrupą jego symetrii.

4. Wszystkie podgrupy grupy przemiennej są normalne.

5. Centrum każdej grupy jest podgrupą normalną.

6. Podgrupa grupy S_4 : $\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ jest normalna.

7. Każda podgrupa indeksu 2 jest normalna.

8. Współrzędna w produkcie grup jest zawsze normalna.

Lemat 18.5. *Następujące warunki są równoważne dla podgrupy H*

1. $aH = Ha$ dla każdego elementu a;

2. $aH \subseteq Ha$ *dla każdego elementu* a*;*
3. $aH \supseteq Ha$ *dla każdego elementu* a*;*
4. $aHa^{-1} = H$ *dla każdego elementu* a*;*
5. $aHa^{-1} \subseteq H$ *dla każdego elementu* a*;*
6. $aHa^{-1} \supseteq H$ *dla każdego elementu* a*.*

Dowód. Pokażemy równoważność trzech pierwszych warunków a następnie równoważność warunku i oraz $i+3$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Oczywiste.

$(2 \Rightarrow 3)$ Mnożąc $aH \subseteq Ha$ z lewej i prawej przez a^{-1} dostajemy $Ha^{-1} \subseteq a^{-1}H$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Jak wyżej, mnożąc przez a^{-1} z lewej i prawej dostajemy 2; 2 i 3 daje nierówności w obie strony, czyli równość, tj. 1.

$(i \Leftrightarrow i+3)$ Należy pomnożyć z lewej przez a^{-1} lub z prawej przez a. □

Definicja 18.6 (Podgrupa sprzężona)**.** Dla $H \leq G$ podgrupa postaci gHg^{-1} to *podgrupa sprzężona* do H.

Fakt 18.7. *Podgrupy sprzężone są izomorficzne. W ogólności dla* $g \in G$ *przekształcenie* $h \mapsto gxg^{-1}$ *jest izomorfizmem grupy z samą sobą (może to być identyczność).*

Lemat 18.8. *Jeśli* $\varphi : G \to H$ *jest homomorfizmem, to* $\ker\varphi$ *jest podgrupą normalną.*

Dowód. Niech $N = \ker\varphi$. Wystarczy pokazać, że $gNg^{-1} \subseteq N$. W tym celu wystarczy pokazać, że $\varphi(gNg^{-1}) = e$, czyli że $\varphi(gng^{-1}) = e$ dla $n \in N$:

$$\begin{aligned}\varphi(gng^{-1}) &= \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1})\\ &= \varphi(g)e\varphi(g^{-1})\\ &= \varphi(g)\varphi(g^{-1})\\ &= \varphi(gg^{-1})\\ &= \varphi(e)\\ &= e\end{aligned}$$

□

18.2 Działanie na warstwach

Popatrzmy na działanie mnożenia podzbiorów grupy w ograniczeniu do warstw (prawostronnych) $H \trianglelefteq G$. Wtedy

$$\begin{aligned}(aH)(bH) &= (Ha)(bH)\\ &= (H(ab))H\\ &= ((ab)H)H\\ &= (ab)(HH)\\ &= (ab)H\ .\end{aligned} \tag{18.1}$$

I tym samym zbiór tych warstw jest zamknięty na tak zdefiniowane mnożenie.

Definicja 18.9 (Grupa ilorazowa)**.** Gdy H jest podgrupą normalną G, to zbiór warstw H w G, czyli G/H, ma strukturę grupy dla działania:

$$aH \cdot bH = abH$$

Grupę tę nazywamy *grupą ilorazową*.

Lemat 18.10. *„Grupa ilorazowa" jest grupą.*

Dowód. Zgodnie z (18.1) jest ona zamknięta na tak zdefiniowane mnożenie.
Łączność istnieje, bo jesteśmy w półgrupie podzbiorów G z mnożeniem.
Element neutralny to $eH = H$.
Element odwrotny łatwo podać: dla aH to $a^{-1}H$. □

18.3 Naturalny homomorfizm $G \mapsto G/H$.

Lemat 18.11. *Niech $H \trianglelefteq G$ będzie podgrupą normalną G. Wtedy naturalny rzut z G na warstwy G, tj. $\pi_H : G \mapsto G/H$, gdzie $\pi_H(a) = aH$, jest homomorfizmem; co więcej, $H = \ker \pi_H$.*

Dowód. Trzeba sprawdzić, że jest to homomorfizm: dla $g, g' \in G$:

$$\begin{aligned}\pi_H(gg') &= gg'H \\ &= gHg'H \\ &= \pi_H(g)\pi_H(g') \ .\end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy, że $\pi_H(g^{-1}) = \pi_H(g)^{-1}$.

Jądro to $\{g : gH = H\}$, czyli dokładnie H. □

Twierdzenie 18.12. *Niech $\varphi : G \to G'$ będzie homomorfizmem. Wtedy istnieje izomorfizm $\psi : G/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$.*

Dowód. Oznaczmy $H = \ker\varphi$.

Izomorfizm definiujemy jako $\psi(aH) = \varphi(a)$.

Kwestia sprawdzenia definicji:

dobrze określone Jeśli $aH = bH$ to

$$\begin{aligned}\varphi(aH) &= \varphi(a)\varphi(H) \\ &= \varphi(a)e \\ &= \varphi(a) \ .\end{aligned}$$

W szczególności, wartość ψ nie zależy od wyboru reprezentanta warstwy.

na jasne, bo chcemy na $\operatorname{Im}\varphi$ i dla dowolnego $a \in G$ mamy $\varphi(aH) = \psi(a)$.

różnowartościowość Załóżmy, że $\psi(aH) = \psi(bH)$. Wtedy, jak dwa punkty temu: $\varphi(a) = \varphi(aH) = \varphi(bH) = \varphi(b)$ czyli $\varphi(a^{-1}b) = e$ i tym samym jest w jądrze. Czyli $a^{-1}b \in H$ i w takim razie $aH = bH$.

homomorfizm Weźmy $\psi(aH) = \varphi(a)$, $\psi(bH) = \varphi(b)$. Wtedy $\psi(aHbH) = \psi(abH) = \varphi(ab)$. □

18.4 Kongruencje, konstrukcja $\mathbb{Z}_n$

To pozwala na zdefiniowanie kongruencji dla podgrupy normalnej $H \trianglelefteq G$:

$$a \equiv_H b \leftrightarrow aH = bH \quad \iff \quad a \equiv_H b \leftrightarrow a^{-1}b \in H \quad \iff \quad a \equiv_H b \leftrightarrow ba^{-1} \in H$$

(Zauważmy też, że $aH = Ha$ oraz $bH = Hb$.)

To jest *kongruencja*:

Definicja 18.13 (Kongruencja w grupie)**.** Relacja $\equiv \subseteq G^2$ na grupie G jest *kongruencją*, jeśli:

relacja równoważności jest relacją równoważności *oraz*

zachowuje działania zachowuje działania, tzn. dla każdych $a, a', b, b' \in G$ zachodzi:

$$\begin{aligned}a \equiv b \wedge a' \equiv b' &\to aa' \equiv bb' \\ a \equiv b &\to a^{-1} \equiv b^{-1}\end{aligned}$$

Poprawność definicji kongruencji $\equiv_H$ można policzyć wprost, ale nie trzeba: wynika z tego, że przekształcenie $a \mapsto aH$ jest homomorfizmem.

18.4.1 Konstrukcja $\mathbb{Z}_m$

Ważny przykład: $\mathbb{Z}_n$: kongruencja na $\mathbb{Z}$ względem podgrupy „liczby podzielne przez n", zwyczajowo określanej jako $n\mathbb{Z}$. Jako że $\mathbb{Z}$ jest przemienna, to ta podgrupa jest normalna. Czyli mamy podgrupę normalną, konstrukcję $\mathbb{Z}_n$ oraz kongruencję na $\mathbb{Z}$.

Rozdział 19

Pierścienie, ciała, arytmetyka modularna

19.1 Pierścienie

Definicja 19.1 (Pierścień)**.** Pierścień, oznaczany zwykle przez R, to zbiór z dwoma działaniami $+, \cdot$, spełniającymi warunki:

- $(R, \cdot)$ jest półgrupą (niekoniecznie przemienną)
- $(R, +)$ jest grupą przemienną

Ponadto zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania

- $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$

Pierścień jest *z jednością*, jeśli ma element neutralny dla mnożenia. Pierścień jest *przemienny*, jeśli $ab = ba$ (czyli półgrupa ze względu na mnożenie jest półgrupą przemienną).

Dalej będziemy się zajmować w zasadzie tylko i wyłącznie pierścieniami przemiennymi z jednością.

Definicja 19.2. Ciało $\mathbb{F}$ to pierścień przemienny z jednością, w którym $(\mathbb{F}, \cdot)$ jest grupą, tzn. każdy element ma element odwrotny, oraz elementy neutralne dodawania i mnożenia są różne („$0 \neq 1$").

Przykład 19.3. Przykłady pierścieni

- liczby całkowite $\mathbb{Z}$
- macierze o współczynnikach z dowolnego ciała (pierścień nieprzemienny!)
- $\mathbb{Z}_m$: liczby modulo m z dodawaniem i mnożeniem
- $R[x]$ wielomiany o współczynnikach z R
- $R[[x]]$ szeregi formalne o współczynnikach z R.

Twierdzenie 19.4. *$\mathbb{Z}_m$ jest ciałem $\iff$ m jest pierwsze.*

Dowód pokażemy w dalszej części rozdziału.

19.2 Arytmetyka modularna $\mathbb{Z}_m$

Definicja 19.5 (Liczenie modulo, $\mathbb{Z}_m$)**.** a przystaje do b modulo m gdy $m|(a - b)$. Oznaczenie:

$$a \equiv_m b \ .$$

Reszta z dzielenia przez m:

$$a \mod m = b \iff a \equiv_m b \wedge b \in \{0, 1, \ldots, m - 1\} \ .$$

Przystawanie (modeulo m) jest kongruencją: kongruencję zdefiniujemy dla pierścienia, ale definicja jest analogiczna dla każdej struktury z działaniem.

Definicja 19.6 (Kongruencja (w pierścieniu))**.** Relacja $\equiv \subseteq R^2$ na pierścieniu G jest *kongruencją*, jeśli:

relacja równoważności jest relacją równoważności *oraz*

zachowuje działania zachowuje działania, tzn. dla każdych $a, a', b, b' \in R$ zachodzi:

$$a \equiv b \wedge a' \equiv b' \Rightarrow a \cdot a' \equiv b \cdot b' \wedge a + a' \equiv b + b'$$

Uwaga. Definicja przystawania jest rozważana zwykle dla dodatniego m; ale w naturalny sposób uogólnia się dla ujemnego:

$$a \equiv_m b \iff a \equiv_{-m} b \ .$$

Zauważmy, że nigdzie tu nie zakładamy, że a, b są nieujemne.

Gorzej jest z resztą z dzielenia: w zasadzie jest zdefiniowana dla dodatniego m. Można też zdefiniować dla ujemnego, ale jest kilka możliwości i nie jest jasne, która jest lepsza.

Lemat 19.7. *Dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}_+$ relacja $\equiv_m$ jest* kongruencją*.*

Dowód. Pokażemy dla mnożenia, dla pozostałych jest analogiczniedodawania jest tylko prościej.

$$\begin{aligned} aa' - bb' &= aa' - ab' + ab' - bb' \\ &= a(a' - b') + (a - b)b' \end{aligned}$$

i oczywiście $m | a(a' - b') + (a - b)b'$.

Dla pozostałych pokazujemy podobnie. □

Wniosek 19.8. Przekształcanie $n \mapsto n \bmod m$ jest homomorfizmem pierścieni $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_m$.

To ważne o tyle, że wykonując działania $\bmod m$ możemy dowolnie przełączać się między $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_m$.

W sumie to chcielibyśmy więcej: czy „prawa" przenoszą się między $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_m$? Na pewno nie wszystkie: umiemy powiedzieć, że w $\mathbb{Z}$ są conajmniej 3 różne elementy, ale to nie jest prawda w $\mathbb{Z}_3$. Okazuje się, że prawa się przenoszą, jeśli nie używają negacji.

Definicja 19.9 (Formuła pozytywna)**.** Niech t_1, t_2 będą wyrażaniami zbudowanymi z nawiasów, zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$, elementów z A oraz działań $+, \cdot$. Wtedy formuła ψ składająca się spójników $\wedge, \vee$ oraz równości $t_1 = t_2$, gdzie t_1, t_2 są jak wyżej, nazywamy *formuła pozytywną.*

Lemat 19.10. *Niech ψ będzie formuła pozytywną, zaś $\varphi : A \mapsto B$ będzie homomorfizmem na pierścień B.*
Jeśli

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

zachodzi w A, to w B zachodzi:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

gdzie ψ' jest uzyskane z ψ przez zamianę stałych c w wyrażeniach przez $\varphi(c)$ zaś Q_i jest kwantyfikatorem (uniwersalnym lub egzystencjalnym).

Dowód to indukcja po strukturze. Podstawa indukcji wynika z tego, że to homomorfizm i nie ma negacji.

Dowód nieobowiązkowy. Pokazujemy, że dla każdego wyrażenia t arytmetycznego, tj. zbudowanego ze zmiennych, stałych oraz operacji dodawania i mnożenia, zachodzi

$$t'(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) = \varphi(t(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \ .$$

Dowód przebiega przez standardową indukcję po strukturze t:

stała jeśli $t = c \in A$ to $t' = \varphi(c) \in B$ i jest OK.

+ jeśli $t = t_1 + t_2$ to $t' = t'_1 + t'_2$ i z założenia indukcyjnego $t'_i(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) = \varphi(t_i(a_1, a_2, \ldots, a_n))$.
Wtedy

$$\begin{aligned}\varphi(t(a_1, a_2, \ldots, a_n)) &= \varphi(t_1(a_1, a_2, \ldots, a_n)) + \varphi(t_2(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \\ &= t'_1(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) + t'_2(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) \\ &= t'(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n)) \ .\end{aligned}$$

· Analogicznie jak dodawanie.

Przechodząc dla dowodu dla formuł. Przejście przez spójniki jest podobne jak powyżej. Dla kwantyfikatorów używamy definicji spełnialności formuł z kwantyfikatorami. Jedyne, co istotne, to że jeśli równość $t_1(a_1, \ldots, a_n) = t_2(a_1, \ldots, a_n)$ zachodzi w A to w B zachodzi $t'_1(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) = t'_2(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$. Zauważmy, że przy kwantyfikatorze uniwersalnym używamy tego, że homomorfizm jest „na”.

To daje równość dla kwantyfikatorów (sprawdzamy semantykę kwantyfikatorów) □

Wniosek 19.11. W $\mathbb{Z}_m$ zachodzą wszystkie prawa, o których myślimy.

19.3 Algorytm Euklidesa

Wracamy do naszego ulubionego ciała: $\mathbb{Z}_p$. Kiedyś już powiedzieliśmy, że jest tam element odwrotny. A co w $\mathbb{Z}_m$? Jest? Nie ma? Dla którego jest, czy można efektywnie wyznaczyć?

Konstrukcyjna metoda używała będzie *algorytmu Euklidesa*. Opiera się on na obserwacji, że $\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$ oraz $\gcd(0, b) = \gcd(b, 0) = b$. Można to przyspieszyć, poprzez $\gcd(a, b) = \gcd(a \bmod b, b)$.

Definicja 19.12. Liczba $0 \neq k \in \mathbb{N}$ jest największym wspólnym dzielnikiem $a, b \in \mathbb{Z}$, jeśli $k|a$, $k|b$ i dla każdego ℓ zachodzi $\ell|a, \ell|b \implies \ell|k$.

Oznaczenie: $\gcd(a, b)$.

Uwaga. gcd jest największy w sensie porządku częściowego zdefiniowanego przez podzielność.

Lemat 19.13. *Niech $k \neq 0, ab, k \in \mathbb{Z}$. Wtedy:*

1. *Jeśli $k|a$ i $k|b$ to $k|(a + b)$ i $k|(a - b)$.*
2. *Jeśli $k|a$ i $k|b$ to $k|(a \bmod b)$.*
3. *Jeśli $k|(a \bmod b)$ i $k|b$ to $k|a$.*

Dowód. Pierwsze: trywialne, reszta to zastosowanie pierwszego. □

Algorytm 2 Algorytm Euklidesa

Założenie: a, b są nieujemne, choć jedna jest dodatnia

```
1: while a > 0 oraz b > 0 do
2:     if a < b then
3:         zamień a, b
4:     a ← a − b                          ▷ Może też być a mod b
5: if a ≥ b then
6:     return a
7: else
8:     return b
```

Wniosek 19.14. Algorytm Euklidesa zwraca największy wspólny dzielnik.

Lemat 19.15. *Algorytm Euklidesa (w wersji z modulo) działa w czasie wielomianowym (od długości zapisu liczb). To ograniczenie jest ścisłe.*

Dowód pozostawiamy jako zadanie.

Lemat 19.16. *W czasie algorytmu Euklidesa możemy przechowywane liczby reprezentować jako kombinacje liniowe (o współczynnikach całkowitych) a oraz b.*

Dowód. Przez indukcję. □

To pozwala na

Lemat 19.17. *Dla $a, b \in \mathbb{Z}_+$ istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie że*

$$\gcd(a, b) = xa + yb.$$

Dokładnie jedna z tych liczb jest dodatnia i jedna niedodatnia. Dodatkowo, liczby te można wybrać tak, że $|x| < b$, $|y| < a$. Jeśli $\gcd(a, b) = 1$ to są dokładnie dwa takie wyrażenia (w jednym x jest dodatnie a w drugim ujemne).

Proty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Lemat 19.18. *W pierścieniu $\mathbb{Z}_m$ element a ma element odwrotny $\iff \gcd(a, m) = 1$.*

Dowód. Niech $m' = \gcd(a, m) > 1$, załóżmy, że a ma element odwrotny b. Wtedy $ab = km + 1$ dla pewnego $k \geq 0$. Ale $m'|a$, czyli też $m'|(km + 1)$, a jako że $m'|m$ dostajemy, że $m'|1$, sprzeczność.

Jeśli $\gcd(a, m) = 1$ to istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$, takie że $ax + my = 1$. Elementem odwrotnym do a jest x: $ax = 1 - my$ i tym samym $ax \equiv_m 1$. □

Uwaga. Zauważmy, że Lemat 19.18 w szczególności daje dowód Twierdzenia 19.4.

19.4 Elementy odwracalne

Definicja 19.19 (elementy odwracalne)**.** Element a pierścienia R nazywamy *odwracalnym*, jeśli istnieje $b \in R$ takie że $ab = 1$.

Zbiór elementów odwracalnych pierścienia R oznaczamy jako R^*.

Twierdzenie 19.20. *Dla dowolnego pierścienia R z jednością zbiór elementów odwracalnych R^* jest grupą na mnożenie.*

Dowód. Trzeba sprawdzić, że R^* jest zamknięte na branie elementu odwrotnego oraz na mnożenie.

1 jest odwracalne.

Jeśli a jest odwracalne to a^{-1} też.

Jeśli a, b są odwracalne, to elementem odwrotnym do ab jest $b^{-1}a^{-1}$. □

Uwaga. $\mathbb{Z}_m^*$ nie ma struktury pierścienia, w szczególności nie jest ciałem!

Twierdzenie 19.21. *Dla ciała skończonego $\mathbb{F}$ grupa $\mathbb{F}^*$ jest cykliczna.*

To twierdzenie jest dość trudne, Rozdział 22 zawiera dowód w przypadku $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$.

Definicja 19.22 (Symbol Eulera)**.** $\varphi(m)$ to liczba liczb względnie pierwszych z m mniejszych od m.

Wniosek 19.23 (Twierdzenie Eulera). Niech a, m są względnie pierwsze. Wtedy

$$a^{\varphi(m)} = 1 \mod m$$

Dowód. $\mathbb{Z}_p^*$ jest grupą o $\varphi(m)$ elementach. Rząd elementu dzieli rząd grupy $\varphi(m)$. □

Lemat 19.24. *Jeśli n, m są względnie pierwsze, to $\varphi(nm) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$.*

Lemat 19.25. *Jeśli p jest pierwsze, $k > 0$ naturalne, to*

$$\varphi(p^k) = (p - 1)p^{k-1} = \frac{p - 1}{p} p^k$$

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

19.5 Chińskie twierdzenie o resztach

Definicja 19.26 (Produkt pierścieni.)**.** Produkt pierścieni definiujemy standardowo: dla pierścienie R, R' ich produkt $R \times R'$ ma jako zbiór iloczyn kartezjański zbiorów R, R' a działania są po współrzędnych.

Lemat 19.27. *Proste własności:*

- $R \times R$ *i* $R' \times R$ *są izomorficzne*
- *produkt kartezjański jest łączny (z dokładnością do izomorfizmu):* $R_1 \times (R_2 \times R_3)$ *i* $(R_1 \times R_2) \times R_3$ *są izomorficzne*
- *Jeśli* R_1 *jest izomorficzne z* R_1' *a* R_2 *z* R_2'*, to* $R_1 \times R_2$ *jest izomorficzne z* $R_1' \times R_2'$*.*

Twierdzenie 19.28 (Chińskie Twierdzenie o resztach)**.** *Jeśli* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *są parami względnie pierwsze, to naturalny homomorfizm z* $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_k}$ *w* $\prod_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_{m_i}$*, gdzie na i-tej współrzędnej bierzemy modulo* $\mathbb{Z}_{m_i}$*, jest izomorfizmem.*

Dowód. Wystarczy pokazać dowód dla $k = 2$, dla dowolnego iloczynu $m_1 m_2 \cdots m_k$ wynika z prostej indukcji: najpierw pokazujemy izomorfizm $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_k}$ z $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \cdots m_k}$ i $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2 \cdots m_k}$, potem $\mathbb{Z}_{m_2 \cdots m_k}$ z $\mathbb{Z}_{m_2} \times \mathbb{Z}_{m_3 \cdots m_k}$, itd.

Zauważmy, że oba zbiory $\mathbb{Z}_{m_1 m_2}$ i $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$ są skończone i mają tą samą liczność $(m_1 \cdot m_2)$, tak więc wystarczy pokazać, że naturalny homomorfizm jest „na" i to już da też, że jest on różnowartościowy.

Wystarczy pokazać, że dla $m = m_1 \cdot m_2$, dla m_1, m_2 jak w sformułowaniu twierdzenia, potrafimy wskazać liczby n_1, n_2, takie że ich rzuty na $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$ dają $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$. Wtedy dowolny element $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2}$ otrzymujemy jako rzut $\alpha n_1 + \beta n_2$ (bo to jest homomorfizm).

Ponieważ $\gcd(m_1, m_2) = 1$ to z Algorytmu Euklidesa dostajemy liczby x, y, x', y' takie że $x m_1 + y m_2 = x' m_1 + y' m_2 = 1$ oraz $x, y' > 0 \geq x', y$. Nasze liczby to $n_1 = y' m_2$ oraz $n_2 = x m_1$. Wtedy $n_1 \bmod m_2 = 0$, $n_1 \bmod m_1 = (1 - x' m_1) \bmod m_1 = 1$; analogicznie dla n_2. □

Uwaga. Reprezentacja dużych liczb przy użyciu Chińskiego Twierdzenia o resztach jest jedną z najpraktyczniejszych.

Przykład 19.29. Spróbujmy znaleźć najmniejszą liczbę spełniającą układ równań

$$x \equiv_{17} 4$$
$$x \equiv_{13} 5$$

Używamy algorytmu Euklidesa, aby znaleźć reprezentację $\gcd(13, 17) = 1$. Liczby, będące argumentami dla gcd przedstawiamy jako kombinacje całkowitoliczbowe 17 oraz 13. Początkowo:

$$17 = 1 \cdot 17 + 0 \cdot 13, \qquad 13 = 0 \cdot 17 + 1 \cdot 13.$$

Wykonujemy dzielenie z resztą:

$$17 = 1 \cdot 13 + 4.$$

i tym samym

$$\begin{aligned} \gcd(17, 13) &= \gcd(4, 13) \\ 4 &= 17 - 1 \cdot 13 \\ &= (1 \cdot 17 + 0 \cdot 13) - 1 \cdot (0 \cdot 17 + 1 \cdot 13) \\ &= 1 \cdot 17 - 1 \cdot \cdot 13 \end{aligned}$$

Następnie:

$$13 = 3 \cdot 4 + 1.$$

i tym samym

$$\begin{aligned} \gcd(4, 13) &= \gcd(4, 1) \\ 1 &= 13 - 3 \cdot 4 \\ &= (0 \cdot 17 + 1 \cdot 13) - 3 \cdot (1 \cdot 17 + (-1) \cdot 13) \\ &= (-3) \cdot 17 + 4 \cdot \cdot 13 \end{aligned}$$

I tym samym

$$\gcd(17, 13) = 1 = (-3) \cdot 17 + 4 \cdot 13.$$

W takim razie $52 \equiv_{13} 0$, $52 \equiv_{17} 1$ oraz $-51 \equiv_{13} 1$, $-51 \equiv_{17} 0$.

Mnożąc przez 4, 5 otrzymujemy, że liczba $4 \cdot 52 + 5 \cdot (-51) = -47$ spełnia warunki zadania. Jest ujemna, najmniejsza dodatnia to $-47 + 13 \cdot 17$.

Dla układu trzech równań

$$\begin{aligned} x &\equiv_{17} 4 \\ x &\equiv_{13} 5 \\ x &\equiv_{11} 2 \end{aligned}$$

moglibyśmy postępować rekurencyjnie, tj. wyliczyć dla dwóch pierwszych równań jak w punkcie pierwszym i zastąpić dwa pierwsze równania przez równanie modulo$13 \cdot 17$:

$$\begin{aligned} x &\equiv_{13 \cdot 17} -47 \\ x &\equiv_{11} 2 \end{aligned}$$

Ale prościej jest uogólnić poprzedni krok: znaleźć trzy rozwiązania i wziąć ich kombinację liniową, tj. szukamy x_{11}, x_{13}, x_{17} takie że:

$$\begin{aligned} x_{17} &\equiv_{17} 1 \\ x_{17} &\equiv_{11 \cdot 13} 0 \\ x_{13} &\equiv_{13} 1 \\ x_{13} &\equiv_{11 \cdot 17} 0 \\ x_{11} &\equiv_{11} 1 \\ x_{11} &\equiv_{13 \cdot 17} 0 \end{aligned}$$

i każde z tych równań rozwiązujemy tak, jak poprzednio, tzn. reprezentują gcd pary jako ich kombinację.

Wynikiem będzie (odpowiednio przesunięte)

$$4x_{17} + 5x_{13} + 2x_{11}$$

19.6 Zastosowanie: Algorytm szyfrowania Rabina

Dane: dwie duże (w szczególności: nieparzyste) liczby pierwsze p, q znane właścicielowi. Publicznie znane jest jedynie: $n = pq$.

Traktujemy komunikat do zaszyfrowania jako element z $\mathbb{Z}_n$, oznaczamy go jako c (jeśli c jest większe niż n, to dzielimy je na kawałki). Nadawca wiadomości przesyła komunikat $c^2 \bmod n$.

Chcemy pokazać, że:

1. odbiorca umie odtworzyć c z c^2
2. jeśli ktoś umie odtworzyć c z c^2 to umie rozłożyć n na p, q, co uznajemy na trudny problem

Jet to przykład podejścia *provable security* umiemy *udowodnić*, że nie można złamać naszego szyfru. Problemem tego podejścia jest założenie, co w zasadzie może zrobić atakujący — a co jeśli ma jakąś dodatkową wiedzę (np. ma dostęp do częściowych logów, zna jakąś historię, ma częściową wiedzę o c albo umie coś powiedzieć o p albo q).

Trzeba zrozumieć najpierw, jak wygląda mnożenie (a dokładniej: potęgowanie) w $\mathbb{Z}_n$. Z chińskiego twierdzenia o resztach $\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. To najpierw w $\mathbb{Z}_p$ i $\mathbb{Z}_q$. Skorzystamy z silnego twierdzenia, które udowodnimy potem:

Twierdzenie 19.30. *Grupa $\mathbb{Z}_p^*$ jest cykliczna.*

Ile jest liczb, które są kwadratami oraz jakiej są postaci?

Lemat 19.31. *Jeśli p jest liczbą pierwszą, to $a^2 \equiv_p b^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \equiv_p b$ lub $a \equiv_p -b$.*

Dowód.

$$\begin{aligned} a^2 \equiv_p b^2 &\iff a^2 - b^2 \equiv_p 0 \\ &\iff (a-b)(a+b) \equiv_p 0 \\ &\iff a - b \equiv_p 0 \text{ lub } a + b \equiv_p 0 \\ &\iff a \equiv_p b \text{ lub } a \equiv_p -b \end{aligned}$$

□

W szczególności, w $\mathbb{Z}_p$ dla zadanego c^2 mamy dwa możliwe odszyfrowania: c i $-c$. W $\mathbb{Z}_{pq}$ mamy 4.

Wniosek 19.32. W $\mathbb{Z}_p^*$ jest $(p-1)/2$ kwadratów i $(p-1)/2$ nie-kwadratów. Są to odpowiednio parzyste i nieparzyste potęgi generatora.

Dowód. Jest $p-1$ elementów, dwa przeciwne przechodzą przez kwadrat na to samo i żadne inne, czyli $(p-1)/2$ jest kwadratami, czyli $(p-1)/2$ nie jest. Potęgi parzyste oczywiście są kwadratami, są różne i jest ich $(p-1)/2$. Czyli nieparzyste to nie-kwadraty. □

Wniosek 19.33. Jeśli g jest generatorem w $\mathbb{Z}_p^*$, to $g^{(p-1)/2} = -1$.

Dowód. Wiemy, że $(g^{(p-1)/2})^2 = g^{p-1} = 1$. Z drugiej strony, są najwyżej dwie liczby x takie że $x^2 = 1$; łatwo sprawdzić, że są to -1 oraz 1. Jako że g jest generatorem, to nie może być, że $g^{(p-1)/2} = 1$ (bo wtedy g nie jest generatorem), czyli $g^{(p-1)/2} = -1$. □

Lemat 19.34. *Jeśli p jest pierwsza to w $\mathbb{Z}_p^*$ jeśli a jest kwadratem, to $a^{(p-1)/2} = 1$, w przeciwnym przypadku $a^{(p-1)/2} = -1$.*

Dowód. **kwadrat** Wtedy $a = g^{2k}$ i $a^{(p-1)/2} = g^{(p-1)k} = (g^{p-1})^k = 1^k = 1$.

nie-kwadrat Wtedy $a = g^\ell$ dla nieparzystego ℓ. Mamy $(g^\ell)^{(p-1)/2} = (g^{(p-1)/2})^\ell = (-1)^\ell = -1$. □

19.6.1 Odtwarzanie

Dla ułatwienia obliczeń, zakładamy, że $p = 3 \bmod 4$, czyli $p = 4k+3$.

Lemat 19.35. *Dla $c \in \mathbb{Z}_p$ mamy $c^{(p-1)/2} = 1$ lub $(-c)^{(p-1)/2} = 1$*

Dowód. Niech g będzie generatorem. Wtedy $-1 = g^{(p-1)/2} = g^{2k+1}$, czyli jest nieparzystą potęgą generatora. Czyli dokładnie jedna z c, $-c$ jest nieparzystą potęgą generatora, a jedna parzystą. Dla tej parzystej zachodzi teza. □

Bez zmniejszenia ogólności w dalszej części zakładamy, że $c^{(p-1)/2} = 1$, tzn. że z c^2 mając do wyboru $c, -c$ bierzemy to, które jest kwadratem.

Z Lematu 19.35 mamy, że $c = c^{(p-1)/2}c = c^{2k+2}$. Czyli wystarczy podnieść komunikat c^2 do potęgi $k+1$ i dostajemy c. W drugim przypadku, gdy $c^{(p-1)/2} = -1$, otrzymujemy $-c$.

Robimy tak dla p, q i tym samym dla n.

19.6.2 Odtwarzanie implikuje rozkład liczby na czynniki

Zakładamy, że algorytm deszyfrujący jest deterministyczny, tj. dla zadanego m zwróci zawsze ten sam wynik (czyli komunikat c, taki że $c^2 = m$).

Algorytm 3 Algorytm faktoryzujący n używający dekodowania szyfru Rabina

Założenie: $n = pq$, n znane, p, q: liczby pierwsze

1: wylosuj (jednostajnie) $x \in \mathbb{Z}_n^*$
2: oblicz x^2
3: zdekoduj c z $x^2 \bmod n$
4: **if** $c = x$ lub $c = n - x$ **then**
5: wróć do kroku 1
6: wyznacz $p = \gcd((c+x)/2, n)$
7: **return** $(p, n/p)$

Lemat 19.36. *Z prawdopodobieństwem 1/2 otrzymujemy dzielnik n*

Dowód. Zauważmy że x odpowiada parze (x_p, x_q) w $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Możliwe zdekodowane wiadomości z (x_p^2, x_q^2) to (x_p, x_q), $(x_p, -x_q)$, $(-x_p, x_q)$ i $(-x_p, -x_q)$ i każda z nich jest równie prawdopodobna (bo dekoder jest deterministyczny a my losowaliśmy, czyli z równą szansą trafiliśmy na każdą z tych czwórek).

Jeśli dekoder zwróci (x_p, x_q) lub $(-x_p, -x_q)$, czyli x lub $-x$, to nic nie mamy. Ale jeśli jedną z pozostałych par, np. $(-x_p, x_q)$, to $((x_p, x_q) + (-x_p, x_q))/2 = (0, x_q)$, czyli liczbę podzielną przez p. Licząc gcd z $n = pq$ dostajemy p. □

Argument, gdy dekoder nie jest deterministyczny, lecz losowy, wygląda analogicznie.

Rozdział 20

Wielomiany

20.1 Pierścień wielomianów

Definicja 20.1 (Wielomian). *Wielomian* f to ciąg $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, myślimy o nich jako o $\sum a_i x^i$. Zwykle zakładamy, że $a_n \neq 0$, w przeciwnym razie dla $n > 0$ utożsamiamy $a_0, \ldots, a_{n-1}$ 0 z $a_0, \ldots, a_{n-1}$ (formalnie wielomiany to klasy abstrakcji, ale nie będziemy się tym specjalnie przejmować).

Mnożenie wielomianów definiujemy tak, jak się spodziewamy, tzn. dla wielomianów $(a_0, \ldots, a_n)$ oraz $(b_0, \ldots, b_m)$ ich iloczyn to $(c_0, \ldots, c_{n+m})$, gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \ . \tag{20.1}$$

Zbiór wielomianów o współczynnikach z pierścienia R oraz naturalnym dodawaniem i mnożeniem (tj. po współrzędnych) to *pierścień wielomianów* $R[x]$. *Zerem* w tym pierścieniu jest wielomian (0).

Liczby $a_0, \ldots, a_n$ to *współczynniki wielomianu*, jeśli $a_n \neq 0$ to jest on *współczynnikiem wiodącym*.

Stopień wielomianu $\deg(a_0, \ldots, a_n)$ dla $a_n \neq 0$ to n. W przypadku wielomiany zerowego stopień to $-\infty$.

Zauważmy, że mnożenie takie jak w (20.1) jest dobrze określone nawet dla pierścienia nieprzemiennego. Jeśli myślimy o wielomianach jak o ciągach, to tę operację nazywamy *splotem* dwóch ciągów (i często oznaczamy przez $*$).

Możemy też myśleć że wielomiany to ciągi nieskończone, które mają tylko skończenie wiele niezerowych wyrazów. Wynik mnożenia z dodanymi wiodącymi zerami jest taki sam.

Lemat 20.2 (Poprawność definicji). *$R[x]$ z mnożeniem zdefiniowanym jako splot jest pierścieniem.*

Jeśli R jest pierścieniem przemiennym (z jednością), to $R[x]$ też jest pierścieniem przemiennym (z jednością).

Zwykle zajmujemy się wielomianami o współczynnikach z ciała.

Lemat 20.3. *Niech $f, g \in R[x]$. Wtedy*

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$$
$$\deg(f \cdot g) \leq \deg(f) + \deg(g) \ .$$

Jeśli R jest ciałem, to

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g) \ .$$

Uwaga. W ostatnim punkcie założenie, że R jest ciałem jest istotne: np. w $\mathbb{Z}_6$ mamy $2 \cdot 3 = 0$ i iloczyn tych dwóch wielomianów stopnia 0 ma stopień $-\infty$.

Dowód. Niech $f = (f_0, \ldots, f_n)$, $g = (g_0, \ldots, g_m)$, gdzie $\deg(f) = n, \deg(g) = m$.

Wtedy $f+g$ ma same współczynniki 0 powyżej pozycji $\max(n, m)$, czyli $\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$.

W $f \cdot g$ zgodnie z definicją splotu dla $k > m + n$ w każdym iloczynie przynajmniej jeden współczynnik jest zerowy.

Jeśli R jest ciałem, to współczynnik przy x^{n+m} wynosi $f_n \cdot g_m$, przy czym $f_n \neq 0 \neq g_m$. Skoro R jest ciałem, to w takim razie $f_n \cdot g_m$ też jest niezerowe i tym samym $\deg(f \cdot g) = \deg(g) + \deg(f)$. □

20.2 Ewaluacja (wartościowanie) wielomianów

Wielomian $f \in R[x]$ równy $(a_0, \ldots, a_n)$ możemy też potraktować jako funkcję z R w R, zdefiniowaną w naturalny sposób:

$$\overline{f}(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$$

Uwaga 20.4. Różne wielomiany niekoniecznie definiują różne funkcje!

W skończonych ciałach to nie jest tak ogólnie możliwe; pokarzemy później, że dla nieskończonych ciał faktycznie definiują różne funkcje.

Lemat 20.5. *Niech $f, g \in R[x]$ i $p \in R$. Wtedy*

$$\overline{f+g}(p) = \overline{f}(p) + \overline{g}(p)$$

Jeśli R jest przemienny, to dodatkowo

$$\overline{f \cdot g}(p) = \overline{f}(p) \cdot \overline{g}(p)$$

Dowód. Niech $f = (f_0, \ldots, f_m), g = (g_0, \ldots, g_m)$, jeżeli jeden ma mniejszą ilość współczynników, niż drugi, to uzupełniamy zerami. Wtedy dla sumy mamy

$$\overline{f+g}(p) = \sum_{i=0}^{n} (f_i + g_i)p^i = \sum_{i=0}^{n} f_i p^i + \sum_{i=0}^{n} g_i p^i = \overline{f}(p) + \overline{g}(p) \ .$$

Dla iloczynu

$$\begin{aligned}
\overline{f \cdot g}(p) &= \sum_{i=0}^{2m} \sum_{k=0}^{i} f_k g_{i-k} p^k \\
&= \sum_{i=0}^{2m} \sum_{k=0}^{i} f_k p^k g_{k-i} p^{i-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{m} f_k p^k \right) \left(\sum_{i=0}^{m} g_i p^i \right) \\
&= \overline{f}(p)\overline{g}(p)
\end{aligned}$$

□

20.3 Dzielenie, podzielność i największy wspólny dzielnik wielomianów

Okazuje się, że w pierścieniu wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}[x]$ można zdefiniować relację podzielności i że można do niego uogólnić wiele pojęć, które znamy z liczb całkowitych (nwd, liczby pierwsze, rozkład na czynniki pierwsze, ...). Pojęcia te okażą się nieodzowne przy konstrukcji ciał skończonych.

Lemat 20.6 (Dzielenie wielomianów)**.** *Niech $\mathbb{F}$ będzie ciałem a $\mathbb{F}[x]$ pierścieniem wielomianów o współczynnikach z $\mathbb{F}$. Dla wielomianów f, g z tego pierścienia, o stopniach $m = \deg(f)$ oraz $n = \deg(g) \neq -\infty$ istnieje dokładnie jedna para wielomianów q, r, taka że $f = gq + r$, gdzie $\deg(r) < \deg(g)$.* [1] *Wielomiany te można efektywnie wyliczyć.*

Wielomiany q, r z Lematu 20.6 nazywamy *ilorazem* oraz *resztą z dzielenia* f przez g.

Dowód. Przez indukcję po stopniu f.

Jeśli $\deg(f) < \deg(g)$, to bierzemy $q = 0$ oraz $r = f$.

Jeśli $\deg(f) \geq \deg(g)$, to bierzemy odpowiednią potęgę: niech wiodący współczynnik g to g_m zaś wiodący współczynnik f to f_n. Wtedy $f - (f_n g_m^{-1}) x^{n-m} g$ ma mniejszy stopień (tu korzystamy z tego, że współczynniki są z ciała i element g_m^{-1} istnieje) i z założenia indukcyjnego ma reprezentację

$$f - (f_n g_m^{-1}) x^{n-m} g = qg + r \ .$$

Wtedy

$$f = (q + (f_n g_m^{-1}) x^{n-m}) g + r \ .$$

[1] Dla $\deg(g) = 0$ korzystamy z tego, że $\deg(0)$ to $-\infty$

Łatwo sprawdzić, że $q + (f_n g_m^{-1})x^{n-m}$ spełnia warunki.

To jest de facto algorytm dzielenia.

Jedyność: jeśli są dwie reprezentacje, to je odejmujemy i dostajemy nietrywialną reprezentację wielomianu 0, sprzeczność. □

Przykład 20.7. Podzielmy wielomiany $f = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4$ oraz $g = x^3 - 3x^2 + 2x$ z $\mathbb{R}[x]$ z resztą:

$$\begin{array}{rr|l} & & x^2 \quad -3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 2x) & x^5 - 3x^4 \quad -x^3 + 7x^2 \quad -4 & \\ & \underline{-x^5 + 3x^4 - 2x^3} & \\ & \quad -3x^3 + 7x^2 & \\ & \quad \underline{3x^3 - 9x^2 + 6x} & \\ & \quad -2x^2 + 6x - 4 & \end{array}$$

Czyli $x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 3) + (-2x^2 + 6x - 4)$.

Definicja 20.8 (Podzielność wielomianów)**.** Wielomian f jest *podzielny przez wielomian* g, jeśli reszta dzielenia f przez g wynosi 0. Zapisujemy to jako $f|g$.

Fakt 20.9. *$f|g \iff$ istnieje wielomian q taki że $g = fq$.*

Lemat 20.10. *Każdy wielomian dzieli 0.*

Jeśli f dzieli $g \neq 0$, to $0 \leq \deg(f) \leq \deg(g)$.

Jeśli f dzieli g i g ma stopień 0, to f też ma stopień 0.

Jeśli f dzieli g i g dzieli f, to $f = cg$ dla pewnego $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Dowód. Oczywiście $f \cdot 0 = 0$.

Skoro $f|g$ to $g = fg'$ i $g', f \neq 0$ (bo $g \neq 0$). W takim razie $\deg(g) = \deg(f) + \deg(g') \geq \deg(f)$.

Skoro $f|g$ to $\deg(f) \leq \deg(g) = 0$. Przy czym $f = 0$ nie jest możliwe, bo wtedy $f|g$ implikuje $g = 0$, co nie jest prawdą (bo $\deg(g) = 0 \neq \deg(0)$.

Skoro $f|g$ i $g|f$ to $f = gf'$ oraz $g = fg'$. Czyli $f = f'g'f$. W takim razie $f'g' = 1$ i tym samym f', g' są stałymi. □

Definicja 20.11 (Wielomian nierozkładalny)**.** Wielomian $f \in R[x]$ jest *nierozkładalny* w $R[x]$, jeśli $\deg(f) > 0$ i nie istnieją wielomiany $g, h \in R[x]$ takie że $f = gh$ oraz $\deg(g), \deg(h) < \deg(f)$.

Wielomiany stopnia 1 są nierozkładalne. Ale mogą być też większego stopnia: np. wielomian $x^2 + 1$ w $\mathbb{R}[x]$

Definicja 20.12 (Największy wspólny dzielnik (gcd) wielomianów)**.** Największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów f, g to taki wielomian h, że $h|f$, $h|g$ oraz jeśli $h'|f$, $h'|g$, to $h'|h$.

Zauważmy, że gcd wielomianów jest określone z dokładnością do stałej multiplikatywnej.

Liczymy to przy użyciu algorytmu Euklidesa. (Cały algorytm i dowód jego poprawności działa dokładnie tak jak w przypadku liczb całkowitych).

Lemat 20.13. *Każde dwa wielomiany $f, g \in \mathbb{F}[x]$ mają największy wspólny dzielnik. Jest on postaci $af + bg$ dla pewnych wielomianów $a, b \in \mathbb{F}[x]$.*

Dowód. Chcemy pokazać, że jeśli $f = qg + r$ to $\gcd(f, g) = \gcd(r, g)$ (i że oba istnieją). W tym celu pokazujemy, że

$$p|g \wedge p|f \iff p|g \wedge p|r$$

Obie implikacje to proste rachunki. Postępując w ten sposób dochodzimy do $\gcd(0, p)$, bo w każdym kroku suma stopni spada. Oczywiście $\gcd(0, p)$ istnieje i jest równe p (z dokładnością do stałej).

Analogicznie jak dla liczb pokazujemy też, że para trzymanych wielomianów jest kombinacją wejściowych (współczynniki też są wielomianami). □

Przykład 20.14. Znajdźmy największy wspólny dzielnik wspomnianych już wielomianów $f = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4$ oraz $g = x^3 - 3x^2 + 2x$ z $\mathbb{R}[x]$ przy użyciu algorytmu Euklidesa. Pierwszy krok to jak poprzednio podzielenie tych wielomianów z resztą.

$$\begin{array}{rr|l} & & x^2 \quad -3 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 2x) & x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 & -4 \\ & -x^5 + 3x^4 - 2x^3 & \\ \hline & & -3x^3 + 7x^2 \\ & & 3x^3 - 9x^2 + 6x \\ \hline & & -2x^2 + 6x - 4 \end{array}$$

Czyli $x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 = (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 3) + (-2x^2 + 6x - 4)$.

Dalej korzystamy z:

$$\gcd(af + b, f) = \gcd(b, f).$$

Tym samym pozostaje nam policzenie $\gcd(-2x^2 + 6x - 4, x^3 - 3x^2 + 2x)$.

$$\begin{array}{rr|l} & & -\frac{1}{2}x \\ \hline -2x^2 + 6x - 4) & x^3 - 3x^2 + 2x & \\ & -x^3 + 3x^2 - 2x & \\ \hline & & 0 \end{array}$$

Tj., $x^3 - 3x^2 + 2x = (-\frac{1}{2}x)(-2x^2 + 6x - 4)$ i w takim razie $\gcd(-2x^2 + 6x - 4, x^3 - 3x^2 + 2x)$ to $-2x^2 + 6x - 4$.

Tym samym poszukiwany największy wspólny dzielnik f oraz g to

$$-2x^2 + 6x - 4 = 1 \cdot (x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4) + (-x^2 + 3) \cdot (-2x^2 + 6x - 4).$$

Wyrażenie go przez f, g jest proste:

$$-2x^2 + 6x - 4 = x^5 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 - (x^3 - 3x^2 + 2x)(x^2 - 3) \ .$$

W pewnym sensie prawdziwe jest też „twierdzenie odwrotne" jeśli wspólny dzielnik p, q można przedstawić jako ich kombinację, to h jest $\gcd(p, q)$:

Lemat 20.15. *Niech $f, g, a, b, h \in \mathbb{F}[x]$. Jeśli $h|f, h|g, h = af + bg$ to $h = \gcd(f, g)$.*

Dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Największy wspólny dzielnik dla wielomianów ma podobne własności, jak dla liczb całkowitych.

Lemat 20.16. *Niech $f, f', g, g', h, a, b \in \mathbb{F}[x]$. Jeśli $f = f'h, g = g'h$ to*

$$\gcd(f, g) = h \gcd(f', g') \ .$$

Jeśli $f = f'h$ oraz $\gcd(h, g)$ jest stałą, to:

$$\gcd(f, g) = \gcd(f', g) \ .$$

Dowody pozostawimy jako ćwiczenie.

Lemat 20.17. *Jeśli f jest nierozkładalny oraz $f|p_1 p_2 \dots p_k$ to $f|p_i$ dla pewnego i.*

Dowód. Dla dwóch, a potem przez indukcję.

$\gcd(f, p_2)|f$, czyli z dokładnością do przemnożenia przez stałą to jest f lub 1. Jeśli f to $f|p_2$ i ok, w przeciwnym razie

$$af + bp_2 = 1$$

Mnożymy przez p_1, dostajemy

$$afp_1 + bp_1 p_2 = p_1 \ .$$

f dzieli lewą stronę, czyli też prawą. □

Lemat 20.18. *Jeśli f_i są nierozkładalne oraz $\gcd(f_i, f_j)$ jest stałą dla $i \neq j$ oraz $f_i|g$ to $f_1 \dots f_k|g$.*

Dowód. Przez indukcję.

Załóżmy, że $f_1 \cdots f_i | g$, czyli $g = f_1 \cdots f_i g'$. Czyli $f_{i+1} | f_1 \cdots f_i g'$. Czyli dzieli jeden z nich. Nie jest to żaden z f_j. Czyli g'. □

Twierdzenie 20.19 (Bézout)**.** *Jeśli $\mathbb{F}$ jest ciałem, $\mathbb{F}[x]$ pierścieniem wielomianów o współczynnikach z tego ciała zaś $f, (x-c) \in \mathbb{F}[x]$ wielomianami z tego pierścienia, to reszta z dzielenia f przez $(x-c)$ to $\overline{f}(c)$.*

W szczególności $(x-c)|f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{f}(c) = 0$.

Dowód. Niech $f = q(x-c) + r$, gdzie $\deg(r) < \deg(x-c) = 1$, tj. r jest stałą. Obliczmy wartościowanie lewej i prawej strony w punkcie c:

$$\begin{aligned}\overline{f}(c) &= (\overline{q(x-c)} + r)(c) \\ &= \overline{q}(c)\overline{(x-c)}(c) + r \\ &= r \ ,\end{aligned}$$

co daje tezę. □

Definicja 20.20 (Pierwiastek, rozwiązanie wielomianu)**.** c nazywamy pierwiastkiem (rozwiązaniem) wielomianu f, gdy $(x-c)|f$; c jest pierwiastkiem k-krotnym, dla $k \geq 1$, gdy $(x-c)^k | f$.

Wniosek 20.21. c jest pierwiastkiem f wtedy i tylko wtedy gdy $\overline{f}(c) = 0$.

Twierdzenie 20.22. *Wielomian $0 \neq f \in \mathbb{F}[x]$ ma najwyżej $\deg(f)$ różnych pierwiastków.*

Dowód. Załóżmy, że ma $k > n$ różnych pierwiastków $p_1, \ldots, p_k$. Wtedy jest podzielny przez każdy z wielomianów $(x - p_i)$. Ponieważ są to wielomiany nierozkładalne, to z Lematu 20.18, f jest też podzielny przez $\prod_{i=1}^{k}(x-p_i)$. Stopień tego wielomianu jest większy niż stopień f, sprzeczność. □

Wniosek 20.23. Jeśli waluacje dwóch wielomianów stopnia co najwyżej n mają te same wartości w $n+1$ punktach, to są równe.

W ciele nieskończonym dwa wielomiany mają skończoną liczbę wartości wspólnych.

Przykład/Zastosowanie 20.24 (Interpolacja wielomianu). Jeśli dla danego wielomianu $f \in \mathbb{F}[x]$ stopnia n mamy podane jego wartości $\overline{f}(p_i)$ dla różnych $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{F}$, to jest on jednoznacznie wyznaczony.

Obliczenia wielomianu można dokonać przy użyciu macierzy Vandermonde'a: niech współczynniki wielomiany f to $f_0, \ldots, f_n$. Wtedy

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_0^1 & \cdots & p_0^n \\ p_1 & p_1^1 & \cdots & p_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n^1 & \cdots & p_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p_0) \\ f(p_1) \\ \vdots \\ f(p_n) \end{bmatrix}$$

Macierz Vandermonde'a jest odwracalna, czyli układ ten można rozwiązać. Dla niektórych wyborów punktów można to zrobić szybko (tzw. szybka transformata Fouriera).

Wielomian ten można też podać bardziej „wprost": powiedzmy, że podamy wielomiany $w_0, \ldots, w_n$, takie że

$$\overline{w_i}(p_i) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j \neq i \\ 1 & \text{dla } j = i \end{cases}$$

oraz $\deg(w_i) \leq n$. Wtedy

$$f = \sum_i \overline{f}(p_i) w_i \ .$$

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned}\sum_i \overline{f}(p_i)\overline{w_i}(p_j) &= \overline{f}(p_j)\overline{w_j}(p_j) \\ &= \overline{f}(p_j)\end{aligned}$$

Zdefiniujmy dodatkowo wielomian

$$w = \prod_{j=0}^{n}(x - p_j) \ .$$

Łatwo wtedy wyrazić w_i: niech $v_i = \frac{w_i}{x-p_i}$. Wtedy

$$w_i(x) = \frac{v_i}{\overline{v_i}(p_i)} \quad .$$

Wielomian ten znany jest jako *wielomian interpolacyjny Legrange'a*.

Zauważmy, że to podejście można interpretować jako zmianę bazy (wielomianów stopnia nie większego niż n): jedną bazą są wielomiany $x^0, x^1, \ldots, x^n$ zaś drugą: wielomiany $w_0, \ldots, w_n$.

Przykład/Zastosowanie 20.25 (Dzielenie sekretu). Dla grupy n osób chcemy stworzyć protokół, który pozwala dowolnym $m+1$ z nich poznać wiadomość, ale każdym m już nie.

Niech nasza wiadomość to c_0. Losujemy liczby $c_1, \ldots, c_m$ i tworzymy wielomian $c = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$. Wyznaczamy teraz n różnych niezerowych punktów $p_1, \ldots, p_n$, osoba i otrzymuje jako wiadomość wartość $c(p_i)$ oraz wartość punktu p_i.

Dzięki interpolacji $m+1$ osób jest w stanie odtworzyć ten wielomian. Natomiast dla dowolnych m osób możemy dorzucić dowolną wartość w punkcie 0 (czyli dokładnie nasze c_0) i one wciąż są w stanie zinterpolować ten wielomian, do dowolnej wiadomości. Innymi słowy: dowodliwie nic nie wiedzą (każdy sekret jest możliwy i równie prawdopodobny).

Rozdział 21

Ciała, rozszerzenia ciał

21.1 Charakterystyka ciała, ciało proste

Definicja 21.1 (Charakterystyka ciała; ciało proste)**.** Dla ciała $\mathbb{F}$ jego *charakterystyka* to rząd 1 w grupie addytywnej.

Ciało generowane przez 1 w ciele $\mathbb{F}$ to *ciało proste*.

Lemat 21.2. *Rząd ciała to albo $+\infty$ albo liczba pierwsza p. W pierwszym przypadku ciało proste to $\mathbb{Q}$, w drugim: $\mathbb{Z}_p$.*

Dowód. Dodajemy do siebie 1. Jeśli nigdy nie uzyskamy 0, to dostajemy kopię liczb naturalnych, oznaczmy przez $\underline{n}$ liczbę uzyskaną jako dodanie do siebie n jedynek. Każdy element ma element przeciwny, oznaczmy analogicznie przez $\underline{-n}$ liczbę przeciwną do $\underline{n}$. Łatwo sprawdzić wprost z definicji, że dla całkowitych n, m zachodzi

$$\underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$$

Analogicznie pokazujemy dla mnożenia: dla dwóch liczb naturalnych zachodzi:

$$\begin{aligned}\underline{n} \cdot \underline{m} &= \underline{n} \cdot (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m \text{ razy}}) \\ &= \underbrace{\underline{n}+\underline{n}+\cdots+\underline{n}}_{m \text{ razy}} \\ &= \underbrace{\underline{1+1+\cdots+1}}_{mn \text{ razy}} \\ &= \underline{nm}\end{aligned}$$

W ciele istnieją elementy odwrotne, oznaczmy przez $\frac{1}{\underline{n}}$ liczbę odwrotną do $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Oznaczmy przez $\frac{\underline{p}}{\underline{q}}$ liczbę $\underline{p} \cdot \frac{1}{\underline{q}}$. Zauważmy, że zgodnie z definicją

$$\frac{\underline{p}}{\underline{q}} \cdot \underline{q} = \underline{p}$$

Pozostaje pokazać, że dodawanie i mnożenie tak zdefiniowanych liczb zachowuje się jak dodawanie i mnożenie w liczbach wymiernych.

Mnożenie: aby pokazać, że $\frac{\underline{p}}{\underline{q}} \cdot \frac{\underline{p'}}{\underline{q'}} = \frac{\underline{pp'}}{\underline{qq'}}$ wystarczy pokazać, że

$$\frac{\underline{p}}{\underline{q}} \cdot \frac{\underline{p'}}{\underline{q'}} \cdot \underline{qq'} = \underline{pp'}$$

sprawdźmy:

$$\begin{aligned}\frac{\underline{p}}{\underline{q}} \cdot \frac{\underline{p'}}{\underline{q'}} \cdot \underline{qq'} &= \frac{\underline{p}}{\underline{q}} \cdot \frac{\underline{p'}}{\underline{q'}} \cdot \underline{q} \cdot \underline{q'} \\ &= \frac{\underline{p}}{\underline{q}} \cdot \underline{q} \cdot \frac{\underline{p'}}{\underline{q'}} \cdot \underline{q'} \\ &= \underline{p} \cdot \underline{p'} \\ &= \underline{p \cdot p'}\end{aligned}$$

(Formalnie trzeba jeszcze pokazać, że operacje tam działają tak jak dla $\mathbb{Q}$, ale tak jest, bo one są wszystkie generowane przez 1.)

Jeśli po m dodaniach dostaliśmy 0, to m musi być pierwsze: dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Skoro dodane do siebie p razy 1 daje 0, to mamy $\mathbb{Z}_p$ (ponownie, powinniśmy pokazać, że operacje działają tak samo). □

Lemat 21.3. *Ciało jest przestrzenią liniową nad swoim ciałem prostym.*

Wniosek 21.4. Każde ciało skończone ma p^k elementów dla pewnych p—pierwsze i $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

21.2 Konstrukcja ciał (skończonych)

Naszym celem obecnie jest konstrukcja ciała skończonego. Takie ciało uzyskamy przez wydzielenie pierścienia $\mathbb{F}[x]$ przez odpowiednią kongruencję. Jest to analogiczna konstrukcja do konstrukcji $\mathbb{Z}_p$ jako wydzielenia $\mathbb{Z}$ przez kongruencję podzielności przez liczbę pierwszą. Naszym ciałem zwykle jest ciało skończone (np. $\mathbb{Z}_p$), ale wszystko działa też dla ciał o charakterystyce $+\infty$.

Definicja 21.5 (Kongruencja modulo wielomian)**.** Dla ciała $\mathbb{F}$ oraz pierścienia wielomianów $\mathbb{F}[x]$ o współczynnikach z tego ciała oraz wielomianu $h \in \mathbb{F}[x]$ definiujemy kongruencję $\equiv_h$ na $\mathbb{F}[x]$:

$$f \equiv_h g \iff h|(f-g).$$

Łatwo sprawdzić, że jest to relacja równoważności oraz że operacje dodawania oraz mnożenia są dobrze zdefiniowane (tj. nie zależą od wyboru reprezentanta). Ponadto uzyskany pierścień jest pierścieniem przemiennym z jednością.

Lemat 21.6. *Dla pierścienia wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}[x]$ oraz wielomianu $h \in \mathbb{F}[x]$ z tego pierścienia relacja $\equiv_h$ na $\mathbb{F}[x]$ jest relacją równoważności.*

Operacje $+, \cdot$ są dobrze zdefiniowane w $\mathbb{F}[x]/\equiv_h$. W szczególności, $\mathbb{F}[x]/\equiv_h$ jest pierścieniem przemiennym z jednością.

Lemat 21.7. *Jeśli wielomian $h \in \mathbb{F}[x]$ jest nierozkładalny, to w $\mathbb{F}[x]/\equiv_h$ istnieje element odwrotny dla $f \not\equiv_h 0$.*

Dowód. Weźmy $\gcd(f,h)$. Wtedy $af + bh = 1$. Wielomian a jest odwrotny do f w $\mathbb{F}[x]/\equiv_h$. □

Twierdzenie 21.8. *Jeśli wielomian h jest nierozkładalny, to ciało $\mathbb{F}[x]/\equiv_h$ (jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{F}$) ma wymiar* $\deg(h)$*. Jeśli $\mathbb{F}$ jest skończone, to takie rozszerzenie ma $|\mathbb{F}|^{\deg h}$ elementów.*

Dowód. Wielomiany $1, x, x^2, \ldots, x^{\deg(f)-1}$ są liniowo niezależne i są bazą tej przestrzeni. □

Twierdzenie 21.9 (bez dowodu)**.** *Dwa ciała skończone o p^k elementach są izomorficzne.*

Przykład 21.10. Wielomian nierozkładalny $x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$; wychodzi izomorficzne z $\mathbb{C}$.

Przykład 21.11. Zbudujmy ciało 4-elementowe. $4 = 2^2$, więc bierzemy $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ i potrzebujemy wielomianu nierozkładalnego stopnia 2. Jedynym takim wielomianem (w tym wypadku) jest $x^2 + x + 1$. Elementami ciała będą $0, 1, x, x+1$ (albo ich klasy abstrakcji ze względu na $\equiv_{x^2+x+1}$). Działania są naturalne. Jedyne nietrywialne: mnożenie $x \cdot x$. Ale w tym wypadku mamy $x^2 \equiv x + 1$ (dokładniej, to $x^2 \equiv -(x+1)$, ale $-(x+1) = x + 1$ w $\mathbb{Z}_2[x]$).

Lemat 21.12. *W $\mathbb{Z}_p[x]$ jest wielomian nierozkładalny dowolnego stopnia większego niż* 0*.*

Dowód polega na podaniu konkretnego wielomianu lub na zliczaniu wielomianów rozkładalnych i nierozkładalnych. Szczegółów nie podamy.

Przykład/Zastosowanie 21.13 (Kody Reeda-Solomona). Ustalamy ciało $\mathbb{F}$, zwykle jest to cialo $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{2^m}$. Traktujemy wiadomość $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})$, gdzie $a_i \in \mathbb{F}$, jako wielomian

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i x_i \in \mathbb{F}[x]$$

Kodujemy tę wiadomość jako wartości wielomianu $\bar{f}$ w n różnych niezerowych punktach $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{F}$, gdzie $n \geq k$. Punkty mogą być wybrane dowolnie, ale zwykle ten wybór jest ustalony, bo dla pewnych wartości łatwiej się liczy. Zbiór wektorów wartości w tych punktach to kod Reeda-Solomona.

Kody Reeda Solomona są *kodem liniowym* wymiaru k. Podane wyżej kodowanie odpowiada mnożeniu wiadomości przez macierz a'la Vandermonde.

Odległość

Odległością (Hamminga) jest dla nas ilość pozycji, na których różnią się dwa wektory. Oznaczenie: $d(c, c')$. To jest odległość, tzn. jest symetryczna, spełnia warunek trójkąta i jeśli $d(c, c') = 0$ to $c = c'$.

Odległość kodu C to

$$d(C) = \min_{u,v \in C, u \neq v} d(u, v) \ .$$

Lemat 21.14. *Odległość kodu Reeda-Solomona to $n - k + 1$.*

Dowód. Dwa różne wielomiany stopnia $< k$ mają najwyżej $k - 1$ wartości wspólnych. Czyli dwa różne słowa kodowe mają nie więcej niż $k - 1$ wartości wspólnych, czyli przynajmniej $n - k + 1$ różnych. □

Optymalność odległości (ograniczenie Singletona)

Kody Reeda-Solomona są optymalne, tzn. jeśli kod ma wymiar k oraz długość n, to któreś dwa słowa kodowe mają odległość $\leq n - k + 1$.

Twierdzenie 21.15 (Ograniczenie Singletona). *Jeśli w zbiorze $|\mathbb{F}|^n$ wybierzemy $|\mathbb{F}|^k$ wektorów, to któreś dwa mają odległość najwyżej $n - k + 1$.*

Dowód. Podzielmy całe $\mathbb{F}^n$ na $|\mathbb{F}|^k$ „stożków": jeden stożek to zbiór elementów o ustalonych k pierwszych współrzędnych. Jeśli któryś stożek zawiera dwa słowa kodowe, to różnią się one na najwyżej $n - k$ pozycjach (bo tyle ich w sumie jest). Czyli rozpatrujemy przypadek, że w każdym stożku jest dokładnie jedno słowo kodowe. Rozpatrzmy dwa stożki różniące się w k pierwszych pozycjach na jednym miejscu, mają one $k - 1$ pozycji wspólnych, czyli najwyżej $n - k + 1$ różnych. □

Poprawianie błędów

Naturalne poprawianie: poprawiamy otrzymane słowo do najbliższego słowa kodowego.

Twierdzenie 21.16. *Jeśli słowo ma mniej niż*

$$\frac{d(C)}{2}$$

błędów, czyli najwyżej

$$\left\lfloor \frac{d(C) - 1}{2} \right\rfloor$$

błędów, to naturalne poprawianie poprawnie dekoduje.

Dowód. Niech c będzie słowem kodowym, które zostało przesłane jako w, wtedy $d(c, w) < \frac{d(C)}{2}$. Jednocześnie w zostało zdekodowane do $c' \in C$, więc

$$\begin{aligned} d(w, c') &\leq d(w, c') \\ &\leq d(w, c) \\ &< \frac{d(C)}{2} \end{aligned}$$

i wtedy

$$\begin{aligned} d(c, c') &\leq d(c, w) + d(w, c') \\ &< d(C) \end{aligned}$$

sprzeczność. □

Uwaga. Spełnienia ograniczenia Singletona nie zamyka badań w teorii kodów korekcyjnych: główną wadą kodów RS jest to, że są nad dużym ciałem: potrzebujemy $|\mathbb{F}| \geq n$, co jest dość kłopotliwe, jeśli myślimy o kodowaniu ciągów bitów.

Algorytm Berlekamp–Welch poprawiania błędów

Cel: dane $\vec{w} = [w_0, \ldots, w_{n-1}] \in \mathbb{F}^n$.
Zakładamy, że jest najwyżej $e \leq \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$ błędów.
szukane: wielomian $f \in \mathbb{F}[x]$, t. że $\deg(f) < k$, $f(\alpha_i) \neq w_i$ dla najwyżej e pozycji albo „?”, jeśli nie ma takiego wielomianu.

Oznaczenie: $I = \{i : f(\alpha_i) \neq w_i\}$. Dobrze zdefiniowane, bo takie f jest jedyne. Niech $e = |I|$.

Moglibyśmy po prostu wybrać te błędy, zinterpolować i rozwiązać...

Popatrzmy na wielomian

Definicja 21.17 (Error locator polynomial). Dla zbioru pozycji błędów I zdefiniujmy *error locator polynomial*:

$$E(x) = \prod_{i \in I} (x - \alpha_i) \ .$$

Dlaczego taki: głównie to wiedziano, że go należy użyć...

Idea: chcemy

$$Q = fE$$

Ten wielomian zeruje się tam, gdzie są błędy, i mówi coś o f tam, gdzie nie ma błędów.

A ściśle:

BW1 wielomian E, o wiodącym współczynniku 1, stopnia $e \leq \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$

BW2 wielomian Q stopnia $\leq e + k - 1$

BW3 dla każdego i zachodzi $w_i E(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$

Słowem kodowym ma być Q/E (jako wielomian).

Uwaga. Jeśli Q/E nie jest zdefiniowane, bo się dzieli z resztą, albo ma za duży stopień, to zwracamy błąd.

Lemat 21.18. *Jeśli dla danego $\vec{w}$ istnieje $\vec{w'} \in RS$ takie że $d(w, w') \leq e \leq \left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor$ to istnieją Q, E spełniające BW.*

Dowód. Niech $f \in \mathbb{F}[x]$ będzie wielomianem odpowiadającym slowu kodowemu w'.

$$E(X) = \prod_{i \in I} (X - \alpha_i)$$
$$Q(X) = E(X) f(X)$$

□

Lemat 21.19. *Jeśli Q_1, E_1 oraz Q_2, E_2 spełniają BW, to $Q_1/E_1 = Q_2/E_2$.*

Uwaga. Zauważmy, że jest to równość ilorazów i reszt, tzn. może być, że oba dzielenia dają resztę. Ale jeśli jeden się dzieli bez reszty, to drugi też, tj. jeśli jest poprawny wynik algorytmu, to wszystkie zwracane dają to samo.

Dowód. Rozpatrzmy wielomian

$$Q_1 E_2 - Q_2 E_1$$

To jest wielomian stopnia $\leq 2e + k - 1 < n$. Rozpatrzmy jego wartość w α_i:

$$Q_1(\alpha_i) E_2(\alpha_i) = w_i E_1(\alpha_i) E_2(\alpha_i)$$
$$Q_2(\alpha_i) E_1(\alpha_i) = w_i E_2(\alpha_i) E_1(\alpha_i)$$

Czyli wielomian $(Q_1 E_2 - Q_2 E_1)(\alpha_i) = 0$. Punktów jest n, stopień jest mniejszy niż n, czyli ten wielomian to tożsamościowo 0. W takim razie

$$Q_1 E_2 = Q_2 E_1 \implies \frac{Q_1}{E_1} = \frac{Q_2}{E_2} \quad \square$$

To jak to odtworzyć? Rozwiążemy odpowiedni układ równań liniowych. Zauważmy, że nie interesuje nas, czy ten układ jest jednoznacznie określony, może być nadokreślony lub niedookreślony — dowolne rozwiązanie jest OK i wiemy, że jakieś jest.

Czas działania: Trzeba rozwiązać układ równań: $\mathcal{O}(n^3)$ (da się może ciut szybciej w zależność od danych) oraz podzielić dwa wielomiany — $\mathcal{O}(n^3)$. Ponownie dla specyficznych wartości może być ciut lepiej.

21.3 Ciała algebraicznie domknięte

Definicja 21.20 (Ciało algebraicznie domknięte)**.** Ciało $\mathbb{F}$ jest *algebraicznie domknięte*, jeśli każdy wielomian nierozkładalny jest stopnia 1.

Fakt 21.21. *Ciało $\mathbb{F}$ jest algebraicznie domknięte wtedy i tylko wtedy gdy każdy wielomian ma pierwiastek.*

Fakt 21.22. *Ciało algebraicznie domknięte jest nieskończone.*

Przykład 21.23. $\mathbb{C}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym. Nie jest nim $\mathbb{R}$ ani żadne $\mathbb{Z}_p$.

Twierdzenie 21.24. *Dla ciała $\mathbb{F}$ istnieje $\mathbb{F}' \supseteq \mathbb{F}$, które jest algebraicznie domknięte oraz działania $\mathbb{F}'$ obcięte do $\mathbb{F}$ to działania $\mathbb{F}$.*

21.4 Rozszerzenia ciał

Alternatywne podejście konstrukcji ciała skończonego (w pewnym sensie bardziej naturalne): dodawanie elementu do ciała. Najmniejsze ciało zawierające dany element: tak myślimy o $\mathbb{C}$: to jest najmniejsze ciało zawierające $\mathbb{R}$ oraz i.

Przykład 21.25. Liczby postaci $\{a+b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{R}\}$ są ciałem. Jedyna nietrywialna operacja to odwrotność, ale łatwo sprawdzić, że $(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2 \neq 0$ i tym samym łatwo podać element odwrotny do $a+b\sqrt{3}$.

Definicja 21.26 (Rozszerzenie ciała)**.** Dla ciała $\mathbb{F}$ przez $\mathbb{F}\langle S\rangle$ oznaczamy najmniejsze ciało zawierające $\mathbb{F}, S$.

Rozszerzenie $\mathbb{F}\langle a\rangle$ jest *przestępne*, jeśli a nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu z $\mathbb{F}[x]$ takie a również nazywamy przestępnym. Jest *algebraiczne*, jeśli a jest pierwiastkiem jakiegoś wielomianu z $\mathbb{F}[x]$.

Żeby ta definicja miała sens, to elementy S powinny być albo zupełnie „spoza" albo z jakiegoś ciała $\mathbb{F}' \supseteq \mathbb{F}$.

Uwaga. Łatwo pokazać, że przecięcie dowolnej ilości cial dalej jest ciałem. W związku z tym jeśli istnieje choć jedno ciało zawierające $\mathbb{F}$, S, to istnieje też najmniejsze (przecięcie wszystkich).

Poniżej pokażemy konstrukcję takich ciał.

21.4.1 Rozszerzenie przestępne

Jak wygląda rozszerzenie przestępne? Możemy sobie wyobrazić, że dodajemy do $\mathbb{F}$ jakiś „świeży" element α. W nowym ciele muszą być też wszystkie wielomiany z $\mathbb{F}[\alpha]$ oraz ich odwrotności. Są więc też wszystkie ilorazy wielomian przez wielomian.

Definicja 21.27 (Ciało ułamków prostych)**.** Rozważmy ciało $\mathbb{F}$ oraz wielomiany nad nim $\mathbb{F}[x]$. Na zbiorze $\{\frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{F}[x], g \neq 0\}$ wprowadzamy relację równoważności $\frac{f}{g} \sim \frac{f'}{g'} \iff fg' = f'g$. Tak określony zbiór jest ciałem z naturalnie zadanym dodawaniem oraz mnożeniem:

$$\frac{f}{g} + \frac{f'}{g'} = \frac{fg' + f'g}{gg'} \quad \frac{f}{g} \cdot \frac{f'}{g'} = \frac{ff'}{gg'}$$

Twierdzenie 21.28. *Ciało ułamków prostych dla $\mathbb{F}$ jest izomorficzne z $\mathbb{F}\langle a\rangle$ dla przestępnego a.*

21.4.2 Rozszerzenia algebraiczne

Rozważamy teraz przypadek $\mathbb{F}\langle a\rangle$ gdy a jest pierwiastkiem jakiegoś wielomianu w $\mathbb{F}[x]$. Chcielibyśmy powiedzieć, że w takim razie to rozszerzenie zawiera $a, a^2, \ldots, a^{k-1}$, gdzie wielomian nierozkładalny, którego a jest pierwiastkiem, ma stopień k. (Tak jak w konstrukcji ciał skończonych). Ale czy tak jest, w szczególności, czy takie wielomian istnieje?

Definicja 21.29. Dla ciała $\mathbb{F}$ oraz elementu a z jego rozszerzenia przez $I(a)$ (ideał a) oznaczamy

$$\{f \in \mathbb{F}[x] : \bar{f}(a) = 0\}$$

Lemat 21.30. *Dla ciała $\mathbb{F}$ oraz elementu a z jego rozszerzenia $I(a)$ jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez wielomiany z $\mathbb{F}[x]$.*

Lemat 21.31. *Dla ciała $\mathbb{F}$ oraz elementu a z jego rozszerzenia $I(a)$ jest postaci*

$$\{fg \,:\, g \in \mathbb{F}[x]\}$$

dla pewnego wielomianu nierozkładalnego $f \in \mathbb{F}[x]$. W szczególności $\bar{f}(a) = 0$.

Dowód. Skoro $I(a)$ jest zamknięty na dodawanie i mnożenie przez wielomiany z $\mathbb{F}[x]$, to jeśli $f, g \in I(a)$ to również $\gcd(f, g) \in I(a)$. Chcielibyśmy mieć „$\gcd(I(a))$", ale czy to ma sens? Ma: możemy dodawać kolejne elementy i patrzeć, czy spada stopień. Może spaść skończoną ilość razy, czyli od pewnego momentu uzyskane gcd skończonego zbioru dzieli każdy wielomian w $I(a)$. □

Wniosek 21.32. Rozszerzenie algebraiczne $\mathbb{F}\langle a\rangle$ jest izomorficzne z $\mathbb{F}[x]/_{\equiv_h}$, gdzie h generuje $I(a)$.

Dowód. W obu rozszerzeniach zachodzi $\bar{h}(a) = 0$; formalnie łatwo pokazać izomorfizm $a \mapsto x$. □

Wielomian z Lematu 21.31 to *wielomian minimalny* dla a nad $\mathbb{F}$.

Definicja 21.33. Jeśli $\mathbb{F}\langle a\rangle$ jest rozszerzeniem algebraicznym, to wielomian $f_a \in \mathbb{F}[x]$ nazywamy wielomianem minimalnym dla a (nad $\mathbb{F}$) jeśli $\bar{f_a}(a) = 0$ oraz dla każdego wielomianu $g \in \mathbb{F}[x]$ spełniającego $\bar{g}(a) = 0$ implikuje $f_a | g$.

Z Lematu 21.31 wynika, że wielomian minimalny istnieje (choć jest wyznaczony z dokładnością do stałej).

21.5 Wielomiany minimalne nad ciałami skończonymi

Twierdzenie 21.34 (Izomorfizm Frobeniusa)**.** *Niech $\mathbb{F} \leq \mathbb{F}'$ będą ciałami skończonymi o $n = |\mathbb{F}|$ i $n' = |\mathbb{F}'|$ elementach.*

Wtedy przekształcenie $\varphi : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}'$ dane jako

$$\varphi(x) = x^n$$

jest automorfizmem ciała $\mathbb{F}'$, co więcej, jest ono identycznością dokładnie na elementach ciała $\mathbb{F}$.

Dowód. Skoro $\mathbb{F}$ jest skończone, to jego (oraz $\mathbb{F}'$) charakterystyka też jest skończona, niech wynosi ona p, wtedy $n = p^k$ dla pewnego k.

Sprawdźmy, że przekształcenie to jest homomorfizmem:

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} \binom{p}{i} a^i b^{p-i}$$

Łatwo sprawdzić wprost z definicji, że $p | \binom{p}{i}$ dla $1 \leq i < n$ i wtedy

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

Następnie przez indukcję po k można pokazać analogiczny wzór dla p^k

$$\begin{aligned}(a+b)^{p^k} &= ((a+b)^p)^{p^{k-1}} \\ &= (a^p + b^p)^{p^{k-1}} \\ &= (a^p)^{p^{k-1}} + (b^p)^{p^{k-1}} \\ &= a^{p^k} + b^{p^k} \quad .\end{aligned}$$

Pozostaje zauważyć, że $n = p^k$ dla pewnego k.

Oczywiście

$$(a \cdot b)^n = a^n b^n$$

Łatwo podać przekształcenie odwrotne: jako że $a^{n'} = a$ w $\mathbb{F}'$, to $a^{n'/n}$ jest przekształceniem odwrotnym, jak powyżej pokazujemy, że jest też homomorfizmem.

Co do identyczności: oczywiście dla każdego elementu a z $\mathbb{F}$ zachodzi $a^n = a$. Jednocześnie wielomian $x^n - x$ ma najwyżej n pierwiastków i są to dokładnie elementy ciała $\mathbb{F}$. □

Twierdzenie 21.35. *Niech $\mathbb{F} \leq \mathbb{F}'$ będą dwoma ciałami skończonymi o q, q' elementach i niech $\alpha \in \mathbb{F}' \setminus \mathbb{F}$.*
Wtedy minimalny wielomian dla α jest postaci

$$f_\alpha(X) = \prod_{j=0}^{r-1} (X - \alpha^{q^j}) \ ,$$

gdzie $r > 0$ jest minimalne takie, że $\alpha^{q^r} = \alpha$ w ciele $\mathbb{F}$.

Dowód. Sprawdźmy, że:

1. α jest pierwiastkiem f_α.
2. f_α ma jedynie pierwiastki jednokrotne
3. jest to wielomian o współczynnikach z $\mathbb{F}$;
4. jest nierozkładalny nad $\mathbb{F}$;

Część 1: oczywiście α jest pierwiastkiem (dla $j = 0$).

Część 2: Sprawdźmy, że f_α ma jedynie pierwiastki jednokrotne: zbiorem pierwiastków (nad ciałem $\mathbb{F}'$) uwzględniając krotności jest

$$\{\alpha^{q^j} \ : \ 0 \leq j < r\} \ .$$

Przypuśćmy, że $\alpha^{q^j} = \alpha^{q^{j'}}$ dla różnych $j \neq j'$, niech j będzie minimalne możliwe, w szczególności $j' > j \geq 0$. Nie może być $j = 0$, bo wtedy $j' < r$ przeczy wyborowi r. Czyli $j' > j > 0$, rozpatrzmy $\alpha^{q^{j-1}}$ i $\alpha^{q^{j'-1}}$. Są one różne ze sposobu wyboru j. Twierdzenia 21.34 mówi, że przekształcenie $\beta \mapsto \beta^q$ jest automorfizmem $\mathbb{F}'$, czyli $\alpha^{q^{j-1}} \neq \alpha^{q^{j'-1}}$ implikuje, że również

$$(\alpha^{q^{j-1}})^q \neq (\alpha^{q^{j'-1}})^q \ ,$$

co daje tezę.

Część 3: wystarczy pokazać, że jeśli podniesiemy współczynniki f_α do potęgi q, to dostaniemy ten sam wielomian (co oznacza, że te współczynniki są z $\mathbb{F}$). Niech

$$f_\alpha(X) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i X^i \ ,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{F}$. Wtedy

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{r-1} a_i^q X^i &= \prod_{j=0}^{r-1} (X - \alpha^{q \cdot q^j}) \\ &= \prod_{j=1}^{r} (X - \alpha^{q^j}) \\ &= \prod_{j=0}^{r-1} (X - \alpha^{q^j}) \\ &= f_\alpha(X) \end{aligned}$$

Pierwsza równość wynika z tego, że a_i jest (z wzorów Viete'a) wyraża się jako pewien wielomian od pierwiastków; jeśli podniesiemy tę równość do q-tej potęgi, to otrzymamy analogiczną zależność na q-te potęgi tych pierwiastków (bo podnoszenie do q-tej potęgi jest automorfizmem); np. $a_{r-1} = \sum \alpha_i$, z czego wynika, że $a_i^q = (\sum_i \alpha_i)^q = \sum_i \alpha_i^q$. Przedostatnia nierówność wynika z tego, że $\alpha^{q^r} = \alpha$, z definicji r.

Część 4 Niech $f(X) \in \mathbb{F}[X]$ taki że $f(\alpha) = 0$. Niech

$$f(X) = \sum_{k=0}^{p} f_k X^k$$

dla pewnych $f_0, \ldots, f_p \in \mathbb{F}$. Wystarczy pokazać, że jeśli $f(\alpha^{q^j}) = 0$ to $f(\alpha^{q^{j+1}}) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\alpha^{q^{j+1}}) &= \sum_{k=0}^{p} f_k \alpha^{q^{j+1}k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} f_k^q \left(\alpha^{q^j k}\right)^q \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} f_k \alpha^{q^j k}\right)^q \\ &= f(\alpha^j)^q \\ &= 0 \end{aligned}$$

Przy czym druga i trzecia równość zachodzą z Twierdzenia 21.34. Skoro f dzieli się przez α to dzieli się przez wszystkie czynniki liniowe f_α (przypomnijmy, że f_α nie ma pierwiastków wielokrotnych) i tym samym przez samo f_α.

Czyli f_α jest wielomianem minimalnym dla α. □

Uwaga. To właśnie badanie automorfizmów ciał (rozszerzeń ciał) dało początek teorii grup. Takie badania pozwoliły pokazać, że niektóre równania nie wyrażają się przez „wzory", że niemożliwe jest podwojenie sześcianu przy użyciu cyrkla i linijki, itp.

Rozdział 22

Skończone $\mathbb{F}^*$ jest cykliczne

Chcemy pokazać, że jeśli $\mathbb{F}$ jest skończone, to $\mathbb{F}^*$ jest cykliczna. Dowód opiera się na wykazaniu, że istnieje w niej element rzędu $n = |\mathbb{F}| - 1$, co daje, że jest on generatorem. Aby to pokazać, będziemy dla każdego $k \leq n$ zliczać w grupie cyklicznej n elementowej oraz w grupie $\mathbb{F}^*$ elementy, które są rzędu k. Zauważmy, że wystarczy pokazać, że w grupie $\mathbb{F}^*$ jest nie więcej, niż w C_n (grupa cykliczna o n elementach).

Lemat 22.1. *Niech $R(G,k)$ oznacza liczbę elementów rzędu k w grupie abelowej G. Jeśli dla grupy skończonej G o n elementach zachodzi dla każdego k*

$$R(G,k) \leq R(C_n,k)$$

to G jest izomorficzne z C_n.

Dowód. Zauważmy, że grupy te mają taką samą ilość elementów i każdy element ma dokładnie określony rząd. Czyli

$$\sum_k R(G,k) = \sum_k R(C_n,k)$$

W związku z tym wszystkie nierówności

$$R(G,k) \leq R(C_n,k)$$

są w istocie równościami, w szczególności G ma element rzędu n, czyli jest cykliczna. □

Niestety, zliczanie elementów rzędu k jest dość kłopotliwe. Łatwiej jest zliczyć elementy, których rząd *dzieli* k.

22.1 Rzędy elementów w grupie cyklicznej

Lemat 22.2. *Niech g będzie generatorem grupy cyklicznej G o n elementach. Wtedy g^m jest jej generatorem $\iff \gcd(m,n) = 1$. W szczególności G ma $\varphi(n)$ generatorów.*

Dowód. $\Leftarrow$

Z algorytmu Euklidesa $\gcd(m,n) = 1 = an + bm$, bez zmniejszania ogólności $b > 0$. Czyli

$$g^{bm} = g^{1-an} = gg^{-an} = g(g^n)^{-a} = ge^{-a} = g$$

Czyli podgrupa generowana przez g^m zawiera g, czyli zawiera też podgrupę generowaną przez g, czyli całą grupę.

$\Rightarrow$ Jeśli g^m jest generatorem, to w szczególności generuje g. Czyli $g^{am} = g^1$, co implikuje $g^{am-1} = e$. Ale z tego wynika, ze $am - 1$ dzieli się przez n. Czyli dla pewnego b

$$am = 1 + bn$$

A to daje, że $\gcd(n,m) = 1$.

Z definicji, ilość liczb względnie pierwszych z n mniejszych niż n to $\varphi(n)$. □

Na ćwiczeniach pokazaliśmy lemat:

Lemat 22.3. *Jeśli G jest cykliczna, to każda jej podgrupa jest cykliczna.*

Lemat 22.4. *Niech G będzie grupą cykliczną rzędu n.*

1. *W G istnieje element rzędu d wtedy i tylko wtedy, gdy $d|n$.*
2. *Niech $d'|d$, $d|n$. Wtedy podgrupa $G_d \leq G$ generowana przez element rzędu d zawiera dokładnie $\varphi(d')$ elementów rzędu d', są to wszystkie elementy rzędu d' z grupy G.*
3. *Grupa G zawiera dokładnie d elementów spełniających równanie $x^d = e$, są to dokładnie elementy podgrupy G_d.*

Dowód. 1. $\Leftarrow$ Popatrzmy na podgrupę generowaną przez ten element. Rząd tej podgrupy to rząd tego elementu. Jednocześnie rząd podgrupy dzieli rząd grupy, czyli $d|n$.

$\Rightarrow$ Niech g będzie generatorem. Rozpatrzmy $g^{\frac{n}{d}}$ (ponieważ $d|n$, to $\frac{n}{d}$ jest liczbą naturalną). Wtedy $(g^{\frac{n}{d}})^d = g^n = e$ i rząd nie może być mniejszy, bo wtedy rząd g też byłby mniejszy.

2. Rozpatrzmy podgrupę generowaną przez wszystkie elementy rzędu d. Z Lematu 22.3 jest ona generowana przez jeden element: q. Wtedy $q^d = e$, bo grupa jest przemienna i rząd każdego z generatorów to d. Jednocześnie rząd nie może być mniejszy niż d, bo wtedy rząd każdego elementu w generowanej grupie też jest mniejszy niż d. Czyli jest to dokładnie grupa G_d. Z Lematu 22.2 grupa ta ma $\varphi(d)$ generatorów i w takim razie G ma $\varphi(d)$ elementów rzędu d.

   Stosując to rozumowanie dla elementu rzędu d' z grupy G_d. Wtedy G_d ma $\varphi(d')$ elementów rzędu d', tyle samo, co G

3. Jeśli $x^d = e$ to rząd d' elementu x jest dzielnikiem d. Czyli x należy do podgrupy G_d; łatwo sprawdzić, że wszystkie jej elementy spełniają to równanie.

□

Lemat 22.5. *Niech G będzie grupą skończoną rzędu n. Jeśli dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $\{g \in G : g^k = e\}$ ma najwyżej k elementów, to G jest cykliczna.*

Dowód. Chcemy użyć Lematu 22.1. Ustalmy rząd k. Rząd elementu dzieli rząd grupy, czyli $k|n$. Ile elementów rzędu k jest w G? Jeśli nie ma takiego elementu, to założenie Lematu 22.1 dla k zachodzi. Załóżmy więc, że jest taki element.

Rozpatrzmy grupę generowaną przez ten element, jest ona cykliczna i ma $k|n$ elementów Wszystkie elementy w tej podgrupie spełniają równanie

$$x^k = e \ .$$

i z założenia nie ma innych elementów w G spełniających to równanie. W szczególności, wszystkie elementy rzędu k są w tej podgrupie. Z Lematu 22.4 ta generowana podgrupa ma dokładnie $\varphi(k)$ elementów rzędu k i tyle samo elementów rzędu k ma w takim razie G.

Z Lematu 22.4 w grupie cyklicznej C_n jest $\varphi(k)$ elementów rzędu k, czyli

$$R(G,k) = \varphi(k) = R(C_n,k)$$

Czyli liczba elementów rzędu k w grupie cyklicznej oraz w G jest taka sama. Czyli założenie Lematu 22.1 jest też spełnione dla tego k. □

22.2 Rzędy elementów w $\mathbb{F}^*$

Pokazaliśmy wcześniej, że:

Lemat 22.6 (Przypomnienie)**.** *Równanie $x^k = 1$ ma w ciele skończonym $\mathbb{F}$ najwyżej k różnych pierwiastków.*

Twierdzenie 22.7. *Grupa $\mathbb{F}^*$ jest cykliczna.*

Dowód. Wiemy, że w $\mathbb{F}$ równanie $x^k = 1$ ma najwyżej k pierwiastków. Potraktujmy je jako równanie w $\mathbb{F}^*$. Z Lematu 22.5 otrzymujemy, że $\mathbb{F}^*$ jest cykliczna. □