1 października 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 2

1. Napisz funkcje tworzące dla ciągów
   (a) a_n – liczba podzialów n na składniki niewiększe niż k.
   (b) b_n – liczba podziałów n na co najwyżej k składników.
   (c) c_n – liczba podziałów n na dokładnie k składników.

2. Pokaż, że
   (a) jeśli $q(n,k)$ jest liczbą podziałów n na k różnych składników, to
   $$\sum_{n,k} q(n,k)x^n y^k = \prod_i (1+x^i y)$$
   (b) jeśli $p(n,k)$ jest liczbą podziałów n na k składników, to
   $$\sum_{n,k} p(n,k)x^n y^k = \prod_i \frac{1}{1-x^i y}$$
   (c) jeśli $\sigma(n,k)$ jest liczbą przedstawień n w postaci sumy k dodatnich składników (przedstawienia różniące się kolejnością uważamy za różne), to
   $$\sum_{n} \sigma(n,k)x^n = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

3. Pokaż, że
   (a) $p(2n,n) = p(n)$,
   (b) $p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$.
   (c) $p(n,k) = \sum_{i=1}^{k} p(n-k,i)$

4. Pokaż wzory
   (a) $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1}-1$, (b) $\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2}$.

5. Pokaż wzory
   (a) $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$, (b) $\left[{n \atop 2} \right] = (n-1)!H_{n-1}$, (c) $\left[{n \atop n-1} \right] = \binom{n}{2}$.

6. Wykorzystując wzory z wykładu pokaż równości:
   (a) $x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}$
   (b) $x^{\underline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^{n-k} x^k$
   (c) $x^n = \sum_{k,m} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} x^m$
   (d) $\sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m = n \\ 0 & \text{gdy } m \neq n \end{cases}$

7. Pokaż wzory
   (a) $\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}$
   (b) $\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m}$
   (c) $\binom{i+j}{i} \left[{n \atop i+j} \right] = \sum_k \binom{n}{k} \left[{k \atop i} \right] \left[{n-k \atop j} \right]$
   (d) $\binom{i+j}{i} \left\{ {n \atop i+j} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop i} \right\} \left\{ {n-k \atop j} \right\}$