10 października 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 3

1. Pokaż, że
$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}};$$
$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_k \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}.$$

2. Pokaż że
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^{\overline{m}} = \frac{n^{\overline{m+1}}}{m+1}$$

3. Pokaż, że liczba k elementowych podzbiorów zbioru $\{1,\ldots,n\}$ nie zawierających żadnej pary kolejnych liczb wynosi
$$\binom{n-k+1}{k}.$$

4. Niech $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ i $M(n)$ oznacza liczbę k, dla której wartość $\left[{n \atop k}\right]$ jest największa (jeśli istnieje więcej takich k, to wybieramy największe z nich). Pokaż że ciąg $\left[{n \atop k}\right]$ jest rosnący dla pewnej ilości początkowych k, potem dla co najwyżej dwóch liczb k przyjmuje wartość największą, a następnie jest malejący dla wszystkich pozostałych k. Udowodnij też, że $0 \le M(n) - M(n-1) \le 1$.

5. Mówimy, że permutacja π ma minimum lokalne w π_i, jeśli $\pi_j > \pi_i$ dla wszystkich $j < i$. Pokaż, że liczba permutacji n elementów o dokładnie k minimach lokalnych równa jest $\left[{n \atop k}\right]$.

6. Pokaż, że średnia liczba cykli dla losowo wybranej permutacji n elementów wynosi
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!} \sum_k k \left[{n \atop k}\right]$$

7. Udowodnij wzory:
   (a) $\left[{n \atop k}\right] = \sum\limits_{0<m_1<m_2<\ldots<m_{n-k}<n} m_1 m_2 \cdots m_{n-k}$
   (b) $\left\{{n \atop k}\right\} = \sum\limits_{0\le m_1\le m_2\le\ldots\le m_{n-k}\le k} m_1 m_2 \cdots m_{n-k}$

8. Liczbą Bella B_n nazywamy liczbę podziałów zbioru n-elementowego na podzbiory. Oczywiście
$$B_n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\}.$$
Udowodnij, że
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

9. Wykaż, że jeśli B_n jest n-tą liczbą Bella, to
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$$

10. (Dobiński) Pokaż, że
$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^n}{m!}.$$

11. Niech d_n będzie liczbą nieporządków n-elementowych (permutacji w których żaden i nie jest na swoim miejscu). Pokaż zależność rekurencyjną:
$$n! = \sum_k \binom{n}{k} d_{n-k}.$$
Wywnioskuj z niej wykładniczą funkcję tworzącą $\hat{D}(x)$ ciągu d_n i jego jawną postać.