22 października 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 4

1. Podział zbioru $\{1,\ldots,n\}$ na ciągi to zbiór ciągów, takich że każda z liczb $1,\ldots,n$ występuje w nim dokładnie raz. Np. wszystkie możliwe podziały $\{1,2\}$ to $\{(1),(2)\}$, $\{(1,2)\}$ oraz $\{(2,1)\}$. Niech a_n oznacza ilość różnych podziałów zbioru $\{1,\ldots,n\}$ na ciągi, przyjmijmy, że $a_0 = 1$. Udowodnij, że
$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1)! a_{n-k}$$
i następnie oblicz wykładniczą funkcję tworzącą ciągu a_n.

2. Dla każdej permutacji $\pi = \pi_1, \ldots, \pi_n$ zbioru $\{1,\ldots,n\}$ niech $\alpha(\pi) = |\{i : \pi_i < \pi_{i+1}\}|$ b"edzie liczb"a wzniesie"n permutacji π. Liczby Eulera $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ definiujemy nast"epuj"aco:
$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = |\{\pi : \alpha(\pi) = k\}|.$$
Udowodnij, że
   (a) $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$
   (b) $n! = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle$
   (c) $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-k-1} \right\rangle$
   (d) $m^n = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{m+k}{n}$
   (e) $x^n = \sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \frac{(x+k)^{\underline{n}}}{n!}$
   (f) $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \sum_i (-1)^i (k-i+1)^n \binom{n+1}{i}$
   (g) $\sum_k \left\langle {n \atop k} \right\rangle \binom{k}{n-m} = m! \left\{ {n \atop m} \right\}$

3. Pokaż, że
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n x^k = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \left(\sum \left\langle {n \atop i} \right\rangle x^{n-i} \right).$$

4. Udowodnij wzory
   (a) $\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} (-1)^{n-k}$
   (b) $\left[{n \atop m} \right] = \sum_k \left[{n+1 \atop k+1} \right] \binom{k}{m} (-1)^{m-k}$
   (c) $m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k}$
   (d) $\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k}$
   (e) $\left\{ {m+n+1 \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} \left\{ {n+k \atop k} \right\} k$
   (f) $\left[{m+n+1 \atop m} \right] = \sum_{k=0}^{m} \left[{n+k \atop k} \right] (n+k)$
   (g) $\binom{n}{m} = \sum_k \left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} \left[{k \atop m} \right] (-1)^{m-k}$