20 listopada 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 7

1. Niech $\varphi(n)$ będzie funkcją Eulera. Pokaż, że
$$n = \sum_{d:d|n} \varphi(d).$$
Wyprowadź z tego wzoru wzór na $\varphi(n)$ i porównaj go ze wzorem
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2. Wyznacz funkcje tworzące Dirichleta (wyraź je za pomocą funkcji $\zeta(x)$) następujących funkcji
   (a) $\ln n$,
   (b) σ_n równego sumie dzielników n,
   (c) $|\mu(n)|$,
   (d) $\varphi(n)$,
   (e) n^a,
   (f) $\sum_{d|n} d^a$.

   Które z tych funkcji są multiplikatywne?

3. Funkcja $f(n)$ jest *silnie multiplikatywna* gdy $f(mn) = f(m)f(n)$ dla każdej pary m, n. Niech λ_n będzie silnie multiplikatywną funkcją taką, że $\lambda(1) = 1$ i $\lambda(p) = -1$ dla wszystkich pierwszych p. Pokaż, że
$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 \text{ gdy } n \text{ jest kwadratem} \\ 0 \text{ gdy } n \text{ nie jest kwadratem.} \end{cases}$$
Pokaż też, że
$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

4. Znajdź liczbę ciągów pierwotnych długości n złożonych z elementów $1, 2, \ldots, k$.

5. Pokaż, że wielomiany cyklotomiczne mają współczynniki całkowite.

6. Rozważamy koła podzielone na n przystających sektorów (jak w ruletce), z ktorych każdy pomalowany jest jednym z k kolorów. Dwa koła nie są istotnie różne jeśli jedno przechodzi na drugie przez obrót. Niech s_n będzie liczbą takich istotnie różnych kół. Niech c_n będzie liczbą istotnie różnych kół, które nie przechodzą same na siebie przez obrót różny od identyczności.
   (a) Pokaż, że $\sum_{d|n} c_d = s_n$ i $\sum_{d|n} dc_d = k^n$.
   (b) Korzystając ze wzoru inwersyjnego wylicz c_n. Pokaż, że $s_n = \sum_{d|n} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right) k^d$.

7. Wykaż, że istnieje dokładnie jedna funkcja Λ spełniająca warunek
$$\sum_{d:d|n} \Lambda(d) = \ln n$$
Pokaż, że $\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{gdy } n = p^k \\ 0 & \text{gdy } n \text{ nie jest potęgą liczby pierwszej.} \end{cases}$

   Udowodnij też, że
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$