20 listopada 2024

Zadania z kombinatoryki, lista nr 6

1. Pokaż, że
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}.$$

2. (Funkcja Γ) Dla rzeczywistego x można zdefiniować
$$x! = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$$
Pokaż, że
   (a) dla naturalnych x definicja ta pokrywa się z definicją silni.
   (b) $x^{\underline{n}} = \dfrac{x!}{(x-n)!}$

3. Na płaszczyźnie narysowano n prostych, z których żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. W pierwszym kierunku równoległych jest x_1 prostych, w drugim kierunku równoległych jest x_2 prostych, w trzecim x_3 prostych itd. Pokaż, że liczba punktów przecięcia prostych wynosi
$$\frac{1}{2}\left(n^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \cdots\right)$$

4. Niech F_n będzie n-tą liczbą Fibonacciego.
   (a) Ile jest sposobów wypełnienie prostokąta $2 \times n$ kostkami domina 1×2?;
   (b) Ile jest ciągów zer i jedynek długości n, w których żadne dwie jedynki nie są obok siebie?
   (c) Pokaż, że $F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$
   (d) Wylicz wartość sumy $Q_n = \sum_k (-1)^k \binom{n-k}{k}$

5. Niech k będzie ustaloną liczbą całkowitą. Znajdź wzór na funkcję tworzącą ciągu a_n określonego jako $\sum y_1 y_2 \cdots y_k$. Sumowanie rozciąga się po wszystkich ciągach k liczb sumujących się do n (ciągi różniące się jedynie kolejnością elementów są rozróżnialne).

6. Udowodnij, że
   (a) liczba permutacji n-elementowych typu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ wynosi
$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n! 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}}$$
   (b) liczba podziałów zbioru n-elementowego typu $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$ wynosi
$$\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \cdots (n!)^{\lambda_n}}$$